

東京女子大学 数学の世界 (2002 年度) 資料

(前期・後期 共通)

非常勤講師 ^{ながしま たかし} 永島 孝

E-mail nagasima-t@mta.biglobe.ne.jp
Web site <http://www.twcu.ac.jp/~nagasima/>
個人Web site <http://www2s.biglobe.ne.jp/~hotori/>
ICQ 28361014

Copyright ©2002 NAGASHIMA Takashi.

目 次

1 はじめに.....	1
2 鶴亀算, 一次連立方程式, 消去法, 不定と不能.....	6
3 二元一次連立方程式の解の公式, 二次の行列式.....	8
4 三元一次連立方程式と三次の行列式.....	11
5 四次以上の行列式, 余因子と井関-ヴァンデルモンドの方法.....	14
6 行列式の基本法則と効率的な計算法.....	17
7 一次連立方程式以外の行列式の応用.....	22
8 和算のその他の話題.....	24

1 はじめに

この講義では**行列式** (determinant) について概説し, あわせて和算について紹介する. 和算とは, 江戸時代に日本で発展した日本固有の数学である. 当時の日本は鎖国していて海外との学問的交流はほとんどなく, 和算は西洋の数学とは独立に発展してきた. しかし明治維新とともに学校教育などに西洋の数学“洋算”が採用され, 和算はおとろえていった. ただし珠算¹だけはその後も伝えられ実際に役立っている.

さて, 行列式は現代数学においても重要な概念である. 行列式は日本で江戸時代に発見されたけれども当時は海外に知られることなく, のちにヨーロッパでもまた日本とは独立に発見されたものである. 現在では行列式は線型代数学の中で行列 (matrix) などとともに学ぶのが一般的であるけれども, ここでは行列や一次変換にはほとんどふれず行列式だけに話を限定する. なお, 用語や記法は, 江戸時代のものでなく現代のものもちいる. つまり, ここでもちいる数式の書き方は欧米と共通のもの, また用語の多くは明治時代に西洋の数学を取り入れたときに作られたものである.

行列式の歴史について. 前述のとおり行列式の理論は日本とヨーロッパとで独立に発見されている. まず, 関孝和²が方程式論の研究の中で高次連立方程

¹そろばんを使う計算.

²せき たかかず, 1640頃-1708. 明治以降 せき こうわ と読み.

式の消去法の考察から行列式を発見し、その理論を“解伏題之法”(1683年)に述べている。行列式の計算の図解は 1992 年発行の関孝和生誕 350 年記念切手に、関の肖像画の背景に描かれている。関孝和が発見して図解したのと同じ三次行列式の計算法はヨーロッパではサリュウ³の発見といわれ、書物に発表されたのは 1846 年が最初である。

井関知辰⁴の著書“算法發揮”(1690年)には余因子をもちいた行列式の展開が図解して述べてある。和算における行列式については 田崎中: “江戸時代の数学”の pp.58-74 および平山諦: “関孝和”の pp.83-91 参照。“算法發揮”の余因子の説明の写真もここに載っている。

ヨーロッパではライプニッツ⁵が一次連立方程式の消去法から行列式の着想を得て、1693年にロピタルに宛てた手紙に例を書いているが、一般論を正しく認識していたかどうかかわからない。のちにクラメル⁶が行列式を研究してその理論を 1750 年に発表している。クラメルの公式⁷はこの著書にある。その後、ヴァンデルモンド⁸やシルヴェスター⁹が行列式を研究している。余因子をもちいて展開する井関知辰の方法はヴァンデルモンドが井関の数十年後に再発見し、シルヴェスターが 1851 年に発表している。これは井関知辰の“算法發揮”とくらべて 161 年後のことである。

凡例

- (1) 定理, 例題, 問などの終わりは“□”で示す。とくに難しい問には“*”を添えてある。
- (2) 証明問題で、証明せよという句を省くことがある。
- (3) 年代は原則として西暦で示すが、一年程度の誤差があり得る。

参考文献

行列式に関する書籍は数多く出版されているが、行列式についてだけ書いたものは少なく、線型代数学について述べた中で行列式を扱っているものがほとんどである。行列式の参考書は、行列式、行列、ベクトル、線型代数(線形代数)、一次連立方程式などのキーワードで書物をさがして見ることを期待する。ここには線型代数に関する参考文献を三つだけ挙げておく。

ドナルド・コーエン, 新井 紀子 共著: **アメリカ流 7 歳からの行列**. ブルーバックス B-1327, 講談社.

小寺 平治: **クイックマスター線形代数** 改訂版. 共立出版.

³Pierre F. Sarrus, 1798-1861.

⁴いせき ともとき, 関と同時代.

⁵G. W. Leibniz, 1646-1716.

⁶クラメル, クラメルとも言う. G. Cramer, 1704-1752.

⁷つぎの節で述べる.

⁸A. T. Vandermonde, 1735-1796.

⁹J. J. Sylvester, 1814-1897

小寺 平治: **明解演習 線形代数**. 共立出版.

和算に関して参考になる書物とウェブサイトにはつぎのものがある.

(1) 書物. なお, いま売られているか否か確かめてない. 品切れまたは絶版の場合もあり得る.

小倉 金之助: **日本の数学**. 岩波新書 61, 岩波書店, 1940.

佐藤 健一: **和算家の旅日記**. 時事通信社, 1988.

佐藤 健一: **数学の文明開化**. 時事通信社, 1989.

佐藤 健一: **日本人と数 江戸庶民の数学**. 東洋書店, 1994.

佐藤 健一 編 (大竹 茂雄, 野口 泰助, 安富 有恒, 千喜良 英二, 弦間 耕一, 佐藤 健一 著): **江戸の寺子屋入門 —— 算術を中心として ——**. 研成社, 1996.

田崎 ^{とおる} 中: **江戸時代の数学**. 総合科学出版, 1983.

富山 ^{とみやま} 和子: **日本の米**. 中公新書 1156, 中央公論社, 1993.

平山 ^{あきら} 諦: **関孝和**. 恒星社厚生閣, 1959, 1974. (この本はかなり専門的.)

平山 諦: **和算の誕生**. 恒星社厚生閣, 1993.

深川 英俊, ダン・ペドー: **日本の幾何 —— 何題解けますか? 森北出版, 1991.**

深川 英俊, ダン・ソコロフスキー: **日本の数学 —— 何題解けますか? [上]. 森北出版, 1994.**

深川 英俊, ダン・ソコロフスキー: **日本の数学 —— 何題解けますか? [下]. 森北出版, 1994.**

深川 英俊: **例題で知る日本の数学と算額**. 森北出版, 1998.

村田 ^{たもつ} 全: **日本の数学西洋の数学 —— 比較数学史の試み**. 中公新書 611, 中央公論社, 1981.

吉田 ^{みつよし} 光由, ^{じんこうき} 塵劫記¹⁰. 1627(寛永四年). (復刻版は少なくともつぎの四つものがあり, 現代語訳と英訳もある.)

(1) 下平 和夫 監修, 勝見 英一郎 校注: **塵劫記**. 江戸初期和算選書 第1巻 [3], 研成社, 1990.

(2) 塵劫記刊行三百年記念顕彰事業実行委員会 (委員長大矢真一)(編著); 吉田光由著: **塵劫記全三巻, 付 現代活字版および論文集**. 大阪教育図書株式会社, 1977.

(3) 与謝野 寛, 正宗 敦夫, 与謝野 晶子 編纂校訂: **古代数学集 [上]**. 日本古典全集 29, 日本古典全集刊行会, 1927.

(4) 吉田 光由 (大矢 真一 校注): **塵劫記**. 岩波文庫, 岩波書店, 1977.

(現代語訳) **現代語『塵劫記』**. 和算研究所 (所在地 156-0045 東京都世田谷区桜上水 5-14-9-108-8), 2000.

¹⁰ じんこうき が正しいけれども, 江戸時代から じんこうき とも読む.

(英訳) **Jinkōki**. Wasan Institute (和算研究所), 2000.

さらに, 上に挙げた参考文献のほかつぎの辞典・事典なども参考になる.

日本数学会 編: **岩波数学辞典**. 岩波書店発行, 1985.

一松 信, 竹之内 脩 編: **改訂増補新数学事典**. 大阪書籍発行, 1991.

さらに, 和算や和算家を題材にした小説などの作品につぎのものがある. 楽しみながら和算に接することができるけれども, 必ずしも史実でなくフィクションであることを忘れないように.

遠藤 寛子 作, 箕田 源二郎 絵: **算法少女**. 少年少女歴史小説シリーズ, 岩崎書店, 1973.

金 ^{キム} ^{チュンミョン} 重明: **算学武芸帳**. 朝日新聞社, 1997. (注. 原題 鳳積術. 第八回朝日新人文文学賞受賞).

金 重明: **戊辰^{ぼしん}算学戦記**. 朝日新聞社, 1999.

永井 義男: **算学奇人伝**. TBS ブリタニカ. 1997.

永井 義男: **中山道^{なかせんどう}算学奇談**. 幻冬舎, 1998.

鳴海 ^{なう} 風: **円周率を計算した男**. 新人物往来社, 1998.

鳴海 風: **算聖伝 関孝和の生涯**. 新人物往来社, 2000.

(2) ウェブサイト:¹¹

<http://ddb.libnet.kulib.kyoto-u.ac.jp/exhibit/>

京都大学貴重資料画像データベース. 井関知辰: “算法発揮” などが見られる.

<http://www.tcp-ip.or.jp/~hom/>

小川 ^{つかね} 東 のサイト. 和算に関する研究成果のほか建部賢弘の伝記などがある. 最も信頼できるサイトの一つ.

<http://www2s.biglobe.ne.jp/~hotori/wasan.html>

永島のウェブサイト“水のほとり”の中の和算のページ. 和算の文献表などがある.

<http://www.hps.hokudai.ac.jp/hsci/name/sangaku.htm>

算額.

<http://www.nikkei.co.jp/pub/science/page/honsi/9807/sangaku.html>

算額に見る江戸時代の幾何学.

<http://torch.icu.ac.jp/~morimoto/wasan/wasan.html>

和算解説.

http://www.kikuka-hs.suginami.tokyo.jp/girls/math_pi3.htm

数学の館“別館”.

<http://www.kurikoma.or.jp/~museum/wasan/>

一関市博物館・和算.

¹¹印刷の都合上アドレスの途中で改行して示してあるものもあるが, 閲覧のためブラウザにアドレスを指定するときは一つの行にすること. なおアドレスはときどき変更されることがある.

<http://www.hps.hokudai.ac.jp/hsci/stamps/1674a.htm>

“関孝和が『発微算法』を刊行”.

<http://www.asahi-net.or.jp/~nj7h-ktr/>

和算の館.

<http://www.shigaku.or.jp/wasan/>

和算研究所.

<http://math1.edu.mie-u.ac.jp/~kanie/material/sankei.htm>

<http://www.asahi-net.or.jp/~nj7h-ktr/>

2 鶴亀算, 一次連立方程式, 消去法, 不定と不能

例題. 鶴^{つる}と亀^{かめ}と合わせて 10 匹, その足の数は合わせて 28 本ある. 鶴と亀とそれぞれの数を求めよ. $\square$

このような問題を鶴亀算という. 算数の問題としては難問であるけれども, 代数では簡単な連立方程式の問題になる. なお, 鶴亀算という呼び名は 1800 年頃から和算で使われるようになったもので, もともと中国から伝わった雉^{きじ}と兎^{うさぎ}の問題である.

鶴が x 匹, 亀が y 匹いるとすると, 問題の条件はつぎの二つの式で記述できる.

$$x + y = 10, \quad (1)$$

$$2x + 4y = 28. \quad (2)$$

これは x と y とに関する二元一次連立方程式である. なお, 二元とは未知数が二つあることの意味である.

この方程式を解くには, 未知数の一つを消去して一元一次方程式にする. 例えばつぎのように計算する. (2) 式から (1) 式の 2 倍を引くと

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 28 \\ 2x + 2y = 20 \\ \hline 2y = 8 \end{array}$$

となって x が消去でき, $y = 4$ が得られる. これを (1) 式に代入して $x + 4 = 10$, ゆえに $x = 6$ を得る. 従って, 答 鶴 6 匹, 亀 4 匹. $\square$

一般に二元一次連立方程式は, 上の例のようにそれぞれの方程式をおのこの定数倍して差を取って, 一方の未知数を消去できる. 三元以上の一次連立方程式の場合はのちに述べるが, 同様な計算で未知数をひとつずつ消去することの繰り返しで解ける.

なお, 鶴亀算という応用問題の場合には, 方程式を解くとともに答が 0 または正の整数でなければならないという条件に留意する.

例 1. 鶴と亀と合わせて 4 匹, その足の数が合わせて 2 本という問題は, 鶴亀算として不適である. $\square$

問 1. *鶴と亀と合わせて a 匹, その足の数が合わせて b 本という問題が鶴亀算として適当である (つまり鶴の数と亀の数がいずれも負でない整数になる) ためには, a が整数で b が偶数で $a \geq 0$ であり, $2a \leq b \leq 4a$ であることが必要十分である. $\square$

ここからは, 答が負でないまたは答が整数であるなどの条件なしに連立方程式を考えることにする.

問 2. 二元一次連立方程式

$$2x + 3y = 7,$$

$$3x + 2y = 5$$

を解け.



不定と不能. まず, つぎの二元一次連立方程式を考えてみる.

$$x + y = 10,$$

$$4x + 4y = 40.$$

例えば $x = 1, y = 9$ でも $x = 17.5, y = -7.5$ でもこの連立方程式はみたされて, 解があるけれども一組に確定しない. この例のように解が一組に決まらない場合のことを, 連立方程式が**不定**であるという.

もう一つ, つぎの二元一次連立方程式を考えてみる.

$$x + y = 10,$$

$$4x + 4y = 28.$$

この場合は x, y にどんな数を代入しても両方の方程式が同時にみたされることはない. この例のように解がまったくない場合のことを, 連立方程式が**不能**であるという.

問 3. 二元一次連立方程式

$$ax + by = 0,$$

$$cx + dy = 0$$

は, 係数 a, b, c, d の値によって, 不定になることはあるけれども, 不能になることは決してない. 

二元一次連立方程式の場合には解が確定するかあるいは不定または不能であるか方程式を見てすぐわかるけれども, 三元以上になるとすぐに見て取れるとは限らない. 従って不定や不能の場合を判別する問題がたいせつになる. また, 不定の場合といえども解が不規則にたくさんあるわけではなく全体として整然とした構造をなしていて, その構造 (解の集合) を考えることが線型代数学のたいせつな問題である. ただしこの講義では解の集合の問題は扱わない.

3 二元一次連立方程式の解の公式、二次の行列式

解の一般の形. 二元一次連立方程式の解の公式を作ってみる. なお, 連立方程式について, 未知数の個数と方程式の数とは必ずしも同じでなくてもよいが, ここでは一致している場合だけを考える. つまり二元の場合は方程式も二つあるとする.

二元一次連立方程式の解の公式を求めるために, 方程式の係数も定数項も文字で表して, つぎの連立方程式を考える.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

消去法で解いてみる. 第一式を d 倍, 第二式を b 倍して差をとれば

$$\begin{array}{rcl} adx & + & bdy = de \\ bcdx & + & bdy = bf \\ \hline (ad - bc)x & & = de - bf \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ の場合¹²は $x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$ が得られる. y を求めるにはこれを第一式と第二式とにそれぞれ代入するか, あるいは x を求めたのと同様な消去法をふたたびもちいる. $ad - bc \neq 0$ の場合, $y = \frac{af - ec}{ad - bc}$ が得られる.

問 4. 上の式を導く計算を, 場合分けに注意して実行せよ. □

逆に, これらの x, y をもとの連立方程式に代入してみれば, 方程式のみたされることが確かめられる.

問 5. このことを確かめよ. □

従って, $ad - bc \neq 0$ の場合は解が一組だけ定まり, 解は

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

とあらわせる. これを**クラメル公式**という. なお, 理由は略すが, $ad - bc = 0$ の場合には, 方程式は不定または不能になる. 不定と不能とのどちらになるかの見分け方についてはあとで述べる.

行列式. 解の公式に繰り返し現れる $ad - bc$ のような形の式を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

とあらわして, 二次の**行列式**という. a, b, c, d をその行列式の**要素**という. 要素の横の並びを**行**といい, 縦の並びを**列**という. 一般に行列式の行の数と列の数とは必ず等しく, 等しいその数を行列式の**次数**という. 次数が n であるとき, n 次の行列式という.

¹²≠ は“等しくない”の意味.

行は上から順に, 列は左から順に, それぞれ番号をつける. (a, b) を第 1 行, (c, d) を第 2 行という. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を第 1 列, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を第 2 列という. 要素をその位置する行と列との番号であらわす. 例えば要素 b を第 1 行第 2 列要素という. **添数と二重添数.** 行列式の要素をあらわすのに, 第 i 行第 j 列要素を

$$a_{ij}$$

などのように**二重添数**をもちいてあらわすのが便利である. 二次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

とあらわせる.

連立方程式の未知数も x, y よりも x_1, x_2 と添数をもちいてあらわすのが便利である. 定数項に関しても同様である.

二元一次連立方程式を, 添数をもちいて

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

と書きなおして, 解を行列式であらわすとつぎのとおりになる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ の場合には解が一組に確定して, 解は}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

である (クラームの公式). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ の場合には方程式は不能または不定である. この場合, 詳しくはつぎのとおりである: 二つの行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

の値が両方とも 0 ならば方程式は不定であり, 少なくとも一つが 0 でないならば方程式は不能である.

問 6. 最初にあげた鶴亀算の問題を, 行列式を使って解け.

□

二次の行列式の基本法則. 二次の行列式について, つぎの法則がなりたつ.

1. 行番号と列番号との一致する位置の要素が 1 で, その他の要素が 0 である行列式の値は 1 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. 二つの列を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. 一つの列の各要素を c 倍すると行列式の値は c 倍になる. 言い替えれば一つの列の各要素の共通因数はくくり出せる. すなわち

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. 一つの列の各要素が二つの数の和であるとき, 行列式の値はつぎのとおり二つの行列式の和として表せる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

論理的には以上の法則だけから二次の行列式の性質はすべて導かれる. その意味ではこれだけで十分とも言えるが, 実際にはそのほかにつぎの法則もよく使われるので, 知っておくに値する.

5. 転置することによって行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

従って, 列に関してなりたつことは行に関してもなりたつ.

6. 二つの列の一致する行列式の値は 0 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

7. 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ca_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ca_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

問 7. それぞれの法則の正しいことを示せ.

□

4 三元一次連立方程式と三次の行列式

三元一次連立方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (3)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (4)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (5)$$

を二元の場合と同じように消去法で解いてみると,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

のときに限り解が一組に確定して, その解 x_1, x_2, x_3 はそれぞれ

$$\frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$\frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$\frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

となることがわかる. その計算はつぎのとおりである. 方程式 (3) の a_{23} 倍から方程式 (4) の a_{13} 倍を引いて x_3 を消去すると

$$(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}.$$

同様に (3) と (5) から x_3 を消去すると

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}.$$

この二つの方程式からさらに x_2 を消去すると

$$a_{13}Dx_1 = a_{13}D_1,$$

ただし

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

ここで場合を分ける. $a_{13} \neq 0$ の場合は $Dx_1 = D_1$ である. $a_{13} = 0$ の場合はふたたびもとの三元連立方程式を考える. (3) は x_1 と x_2 だけの方程式になっているから, (4) と (5) から x_3 を消去して得られる

$$(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_1 + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})x_2 = b_2a_{33} - b_3a_{23}$$

と連立して x_2 を消去して $Dx_1 = D_1$ が得られる. 従って $a_{13} \neq 0$ の場合も $a_{13} = 0$ の場合も

$$Dx_1 = D_1$$

である. ゆえに, $D \neq 0$ ならば $x_1 = \frac{D_1}{D}$. x_2, x_3 についても同様.

問 8. 上の計算の詳細を補え. □

三次行列式. さて, この x_1, x_2, x_3 に共通の分母

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

のような式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

とあらわして, 三次の行列式という. 行列式をもちいれば, 上にあげた三元一次連立方程式の解は,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のとき

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

とあらわせる. これが三元の場合のクラメールの公式である. また,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

のときには方程式は不定または不能である.

三次の行列式についても二次の場合と同様な法則がなりたつ (後述). さて,

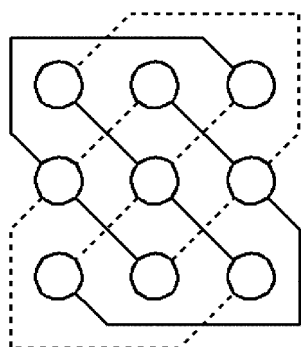
三次の行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を計算するには

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

を計算する, つまり行列式の要素を斜めにかけ合わせ, 左上から右下への積は +, 右上から左下への積は - として, 合計すればよい. この計算法を “関-サリュウの規則”¹³ と言う. これは関孝和の著書 “^{かいふくだいのほう}解伏題之法” (1683) の中に述べてあるが, ヨーロッパではサリュウ¹⁴の発見とみなされている.

¹³一般にサリュウの規則またはサラスの規則と呼ばれている.

¹⁴Pierre F. Sarrus, 1798–1861.



実線は +, 点線は -. 解伏題之法ではそれぞれ赤線と黒線で, + は生, - は尅と書いてある. なお, 和算では数式を縦書きにするから, 解伏題之法では符号がこの図と反対になっている.

図 1: 関-サリュウの規則

例 2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3.$ □

問 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ を計算せよ. □

問 10. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$ を確かめよ. □

問 11. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を示せ. □

四次以上の行列式については関-サリュウの規則のような計算法を適用することはできない. 二次, 三次の場合から誤った類推で四次の行列式を計算しないように注意すること.

四次以上の行列式にも当てはまる一般的な計算法は, 関孝和の“解伏題之法”にある交式斜乘法が世界で最初のものであるが, この方法は繁雑である. 井関知辰の著書“さんぼうはつき算法發揮”に初めて発表され, ヨーロッパでも後にヴァンデルモンドが再発見した方法, つまり余因子によって展開するのがわかりやすい.

5 四次以上の行列式, 余因子と井関-ヴァンデルモンドの方法

一般に n^2 個の数を $n \times n$ の正方形に配列した

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の形のものを n 次行列式という. この行列式の第 i 行と第 j 列とを取り除いてできる $n-1$ 次行列式の $(-1)^{i+j}$ 倍を, 第 i 行第 j 列余因子¹⁵という. なお,

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & (i+j \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (i+j \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

である.

例 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ の第 1 行第 1 列余因子は $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4$, 第 1 行第 2 列余因子は $-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$, 第 1 行第 3 列余因子は $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$ である. $\square$

いま n 次行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の第 i 行第 j 列余因子を仮に A_{ij} であらわすと,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

がなりたつ. つまり第 1 行の要素と第 1 行の余因子との積和がもとの行列式に等しい. これを, 第 1 行での展開という. 第 2 行での展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$

¹⁵余因数ともいう. 英語は cofactor.

なども同様になりたつ. また, 行に関してなりたつことは列に関してもなりたつから,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

がなりたつ. これは第 1 列での展開である. 同様に第 2 列などでも展開できる. このように余因子をもちいて行または列で展開するのが井関-ヴァンデルモンド¹⁶の方法である. 三次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

の第 i 行第 j 列余因子 ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) を A_{ij} とし井関-ヴァンデルモンドの展開式を例示すると:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \quad D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \quad D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

左の三つは第 1, 2, 3 行での展開であり, 右の三つは第 1, 2, 3 列での展開である.

例 4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$ (第 1 行で展開). $\square$

問 12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ を第 2 行で展開して値を求めよ. また, 第 1 列で展開して値を求め, 同じ値になることを確かめよ. $\square$

問 13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ を第 1 行で展開して値を求めよ. $\square$

問 14. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ の第 1 行の各列の余因子を計算せよ. $\square$

¹⁶一般にヴァンデルモンドの展開とよばれている

問 15. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ を第 1 行で展開し, この行列式が $(a+2)(a-1)^2$ に等しいことを確かめよ. □

井関-ヴァンデルモンドの展開法をもちいれば行列式の計算は一つ次数の低い行列式の計算に還元できる. たとえば三次行列式の展開には三次行列式の余因子を三つ計算すればよく, その余因子はおのおの二次行列式であらわされる. 四次以上の行列式についても同様に余因子の計算に還元できるから, 井関-ヴァンデルモンドの展開法を繰り返すことで次数を下げて計算できる.

つぎに, 主対角線, 三角行列式を定義する. n 次行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の左上から右下に至る要素の並び $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ を主対角線という. 主対角線の左下の要素がすべて 0 である行列式および主対角線の右上の要素がすべて 0 である行列式をどちらも三角行列式と呼ぶ. 三角行列式の値はその主対角線要素全部の積に等しい. たとえば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

問 16. このことを確かめよ. □

井関-ヴァンデルモンドの展開では, 同じ行の要素と余因子との積和を作った. それでは, 異なる行の要素と余因子との積和はどうなるであろうか.

例 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ の第 2 行要素と第 1 行余因子との積和は

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 0 \text{ である. } \quad \square$$

要素と余因子との積和についての一般論は後に述べる.

問 17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ の第 1 行要素と第 3 行余因子との積和を計算せよ. □

6 行列式の基本法則と効率的な計算法

基本法則. 三次以上の行列式についても, 二次の場合と同様な法則がなりたつ. ここには三次の場合を例示するが, 四次以上でも同様である.

1. 単位行列の行列式の値は 1 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. 二つの列を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. 一つの列の各要素を c 倍すると行列式の値は c 倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. 一つの列の各要素が二つの数の和であるとき, 行列式の値は例えばつぎのように二つの行列式の和として表せる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

論理的には以上の四つの法則だけから行列式の性質はすべて導かれる. しかし, つぎの法則もよく使われるので, 知っておくに値する.

5. 転置することによって行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

従って, 列に関してなりたつことは行に関してもなりたつ.

6. 二つの列の一致する行列式の値は 0 である. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

7. 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ca_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ を上述の法則のいくつかをもちいて計算してみる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \quad \square$$

問 18. 上の例の計算について説明せよ. □

上の例では井関-ヴァンデルモンドの方法で展開するのに先立って第 1 行の要素が一個を除いて 0 になるように変形した. 従って余因子 3 個のうち 1 個だけを計算して展開できた. この考え方は次数の高い行列式に対してとくに有効である. 一つの行または列の中になるべく多く要素 0 を作るように変形しておいて, その後で展開するのが効率的である. 要素 0 に対応する余因子は計算しなくてよいからである. なお, 井関-ヴァンデルモンドの展開に先立って行列式を変形して要素 0 を作る計算法はヨーロッパで考えられたものであり, 和算にはみられない.

$$\begin{aligned} \text{例 7. } & \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a+1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \\ & (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}, \text{これを第 1 列で展開して} \\ & (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

問 19. 上の例の計算について説明せよ. □

$$\text{問 20. } \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 \text{ を確かめよ.} \quad \square$$

$$\text{問 21. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ を確かめよ.} \quad \square$$

クラームルの公式. つぎにクラームルの公式を三元の例で考えてみる. 三元一次連立方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

の係数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を考える. 係数行列式の第 1 列を方程式の定数項で置き換えた行列式 D_1 を考える. 方程式がみたされているとすると $b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ などがなりたつから, これらを代入して

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{22}x_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{32}x_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = D \cdot x_1. \end{aligned}$$

すなわち $D_1 = Dx_1$. 同様に

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

と書くと $D_2 = Dx_2$, $D_3 = Dx_3$. ゆえに, 係数行列式 D が 0 でないときは

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

問 22. クラームルの公式を導いた上記の計算について説明せよ. □

問 23. 逆に $D \neq 0$ のとき $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$ がもとの方程式をみたすことを示せ. □

$D = 0$ の場合は $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ ならば不定であり, D_1, D_2, D_3 の少なくとも一つが 0 でないならば不能である. 逆に, 方程式が不定または不能ならば $D = 0$ である. 方程式が不能または不定になるときについての考察は線型代数学の問題である. とくに不定の場合に解の全体のなす集合の構造を考えることがおもしろい.

消去法の原理. 右辺の定数項がすべて 0 の三元一次連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

を考えてみる. このように定数項がすべて 0 であるとき, その一次連立方程式は同次¹⁷であるという. この場合, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ という解のあるこ

¹⁷英語では homogeneous.

とはあきらかだから、この方程式は不能ではあり得ない. 係数行列式を D とおくと, $D = 0$ ならば不定になり $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外にも解がある. 逆に $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外に解があれば不定であるから $D = 0$. このことは三元の場合に限らず, あらゆる同次一次連立方程式についてなりたつ. すなわち, 同次 n 元一次連立方程式に $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 以外の解のあるための必要十分条件は, その係数行列式の値が 0 になることである. この事実を“消去法の原理”とよぶ.

問 24. 三つの二次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} &= 0, \\ a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

を同時にみたす x があれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

である.

□

余因子の性質. つぎに, たとえば三次の行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を考え,

その第 1 行第 j 列余因子 ($j = 1, 2, 3$) を A_{1j} とする. 第 1 行の余因子の値は

第 1 行の要素に依存しないから, $D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を考えると D' の第

1 行第 j 列余因子も同じく A_{1j} である. そこで行列式 D' を第 1 行で展開すると $D' = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ となる. ところが行列式の基本法則から $D' = 0$ となるから, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$ がわかる. つまり三次の任意の行列式 D の第 2 行要素と第 1 行余因子との積和は 0 に等しい. 一般に, 任意の行列式について, 異なる行の要素と余因子との積和は 0 である. この事実は井関-ヴァンデルモンドの展開とともに余因子に関する最も基本的な定理であり, 逆行列を余因子であらわす公式などを導くのに線型代数学で使われる.

行列式の積. 二つの行列式の積を行列式であらわすことができる. 三次の行

$$\text{列式で例示すると } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

がなりたつ. つまり第一の行列式の第 i 行と第二の行列式の第 j 列との積和を第 i 行第 j 列要素とする行列式を作ると, これが二つの行列式の積に等しい.

問 25. 二次の行列式の場合についてこの事実を確かめよ. $\square$

余因子に関する法則と行列式の積をあらわす行列式とをもちいると, つぎのような計算ができる.

例 8. 行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を考え, その第 i 行第 j 列余因子 ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) を A_{ij} として, A_{ij} を第 j 行第 i 列要素とする行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \text{ を考えてみる.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = D^3,$$

$$\text{ゆえに } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = D^2.$$

$\square$

問 26. 上の例について説明せよ. $\square$

7 一次連立方程式以外の行列式の応用

一次連立方程式については、数值的に解くにはクラメルの公式をもちいて行列式の計算で解くよりも行列の変形による消去法の方が計算が簡単である。行列の変形で一次連立方程式を解く方法はガウス¹⁸の消去法とよばれているが、中国で昔から知られている。行列については説明を省くが、ドナルド・コーエン& 新井紀子: “アメリカ流 7 歳からの行列”などを参照。

一次連立方程式について行列式の恩恵のあるのは文字係数の方程式についての理論的な考察の場合などである。これに反して、二次以上の連立方程式については、理論的な扱いだけでなく数值的に解く場合も含めて、行列式が役立つ。

関孝和ははじめから任意の次数の連立方程式を考え、行列式をもちいて消去法を行うことを考えている。二次以上の連立方程式の消去法はむずかしいので説明を省くが、未知数を含んだ式を要素とする行列式をもちいて計算できる。なお、二次以上の連立方程式の場合は、どんな消去法によっても、消去した結果の一元方程式の次数の高くなることは避けられない。関孝和が行列式とその応用を述べた“解伏題之法”には、3 元 4 次連立方程式から未知数を二つ消去して一元 54 次方程式を導いた例がある。また 6 元 6 次連立方程式で消去法の結果が一元 1458 次方程式になる例題がある。

問 27. *行列式をもちいて二次以上の連立方程式を解く関孝和の方法について調べよ。 □

座標と行列式. 和算には座標の考えがなかったのに対し、ヨーロッパでは座標をもちいて幾何学の問題を代数的に扱うことをデカルト¹⁹が始めてから、座標²⁰がひろくもちいられるようになり、やがて行列式と座標との関係も考察された。

座標平面上で四点 $(0, 0)$, (a, c) , $(a + b, c + d)$, (b, d) を頂点とする平行四辺形の“符号付き面積”は行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

の値に等しい。ただし、符号付き面積とは、頂点を

$$(0, 0) \longrightarrow (a, c) \longrightarrow (a + b, c + d) \longrightarrow (b, d) \longrightarrow (0, 0)$$

順にたどったときに左回りなら正、右回りなら負の符号をつけたものである。また四点 $(0, 0)$, (a, c) , $(a + b, c + d)$, (b, d) が一直線上にあるための条件は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

¹⁸C. F. Gauss, 1777–1855.

¹⁹R. Descartes, 1596–1650.

²⁰詳しくは直交座標系。創案者の名にちなんでデカルト座標系 (Cartesian coordinates) ともいう。

である.

問 28. これらの事実を確かめよ. □

問 29. 座標平面上の三点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) を頂点とする三角形の符号付き面積は

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

の値に等しい. 符号は, 頂点を

$$(x_1, y_1) \longrightarrow (x_2, y_2) \longrightarrow (x_3, y_3) \longrightarrow (x_1, y_1)$$

の順にたどったとき左回りなら正, 右回りなら負とする. また三点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) が一直線上にあるための条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

である. なぜか. □

座標平面上の点 (x, y) を点 $(ax + cy, bx + dy)$ に写す一次変換を考えると, 図形をこの一次変換で写したときに面積はもとの図形の面積の

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ 倍}$$

になる. さらに, この一次変換が正則であるための条件すなわち逆変換のあるための条件は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

である. ドナルド・コーエン& 新井紀子: “アメリカ流 7 歳からの行列” の第 6 章を参照.

問 30. *行列, 一次変換などについて調べよ. □

平面すなわち二次元の場合について述べたが, 三次元以上でも同様なことがなりたつ. たとえば三次の行列式は三次元空間の一次変換で図形が写されたときの体積の比を表している. 空間図形の体積も座標と行列式で求めることができるが, 説明は省く. さらに, 一次変換の逆変換も行列式と余因子とをもちいて計算できる. 線型写像 (一次変換) と行列式との関係は線型代数において大切なテーマの一つである.

8 和算のその他の話題

日本には6世紀頃に中国からその他のもろもろの学問とともに数学も伝わってきた。その当時のものでいまもひろく知られ実用になっているのは掛け算の九々である。また中国で使われていた正、負、分数などの用語もその当時伝わったと思われる。そのほかに算木と算盤²¹をもちいて平方根を求めたり一元方程式を解いたりする計算法、一次連立方程式の解法、ピタゴラスの定理(現代日本では三平方の定理ともいう)等々や天文・暦学のための数学が中国伝来の教科書をもちいて学ばれていた。

問 31. 算木と算盤について調べよ。 ☐

問 32. *算木と算盤をもちいた計算法について調べよ。 ☐

ピタゴラスの定理は中国で昔から知られていたのが伝えられ、日本では中国伝来の用語で鈎股^{こうこ}の術または鈎股弦^{こうこげん}の術とよばれていた。直角三角形の直角をはさむ二辺のうち短い方を鈎^{こう}²²、長い方を股^こ、斜辺^{せつぺん}を弦^{げん}とよび、鈎股弦とはもともと直角三角形の意味である。

16世紀に朝鮮から中国の数学書が日本に持ち込まれた。その中でも朱世傑²³“算学啓蒙”(1299)と程大位²⁴“算法統宗”(1593)との二つがとくに大きな影響をもたらした。前者には算盤に算木を置いて方程式を解く天元術があり、後者にはそろばんをもちいた計算法が述べてある。17世紀頃にはこれらの書物を読み解くことから、日本の数学の新たな発展が始まる。このころからの日本独自の数学は和算とよばれる。明治維新で学校制度が設けられるとき、数学教育は和算と洋算とのどちらにするか論争があったが、洋算が採用された。これに伴って和算はおとろえていくが、洋算を急速に導入できたのは和算の伝統のおかげであろう。

和算には暦学、商業、土木、建築などへの応用という実用的な側面と実用を離れた趣味的な側面とがある。数学が庶民の道楽の一つであったことは世界の文化史に類例のない特徴である。一方、物理学などと深く関わり合いながら発達したヨーロッパの数学とは対照的に、和算には天文学・暦学以外の自然科学とのかかわりがほとんど見られない。

そろばんについては、毛利重能²⁵が1622年にいわゆる割算書²⁶で計算法を述べたのが、書物としては最初のものと思われる。題のとおり割算の説明から始まっているのは、掛け算までは教科書を見るまでもなく学ばれていたであろう。のちに述べる塵劫記などにももちろんそろばんの使い方が説明してある。一方そろばんの改良も重ねられて、そろばんによる計算はひろく普及し

²¹そろばんにも算盤という字をあてるけれども、さんばんはそろばんとはちがう。

²²異体字の鈎やその略字の勾、また略字の勾も使われる。

²³しゅせいけつ。

²⁴ていだい、1533-1605。

²⁵もうり しげよし、1600頃-1650頃。

²⁶書名が不明であり、最初に割算の説明が述べてあることから一般に割算書とよぶ。

ていった。

問 33. *そろばんの歴史について調べよ。 ☐

問 34. *コンピューターや電卓の普及している現代にそろばんを使う意義があるか考察せよ。 ☐

毛利重能には吉田光由²⁷などのすぐれた弟子たちがいた。和算の初期の書物としては吉田光由の塵劫記^{じんごうき}が 1627 年に出版されて以来、明治初期まで何度も改訂を繰り返し、多くの人々に読まれている。一、十、百、千、万、億、兆、京など 10^{68} までの数の位取りの名称はいまもこの塵劫記に準拠している。

問 35. 数詞 万、億、兆、京、... について調べよ。 ☐

塵劫記由来のものでは ねずみ算 という語がいまもひろく知られている。ねずみ算とはつぎのような問題である。1 月に父母 2 匹のねずみがいて子を 12 匹生む。親子合わせて 14 匹になる。このねずみたち、2 月には子もまた親となって、最初の親とともにそれぞれ子を 12 匹ずつ生む。親と子と孫とを合計して 98 匹になる。このようにしてふえていくとき、一年間で何匹になるか。

問 36. ねずみ算について考えよ。 ☐

問 37. 塵劫記についても調べよ。 ☐

問 38. 塵劫記のねずみ算以外の問題についても考えてみよ。 ☐

寛永十八 (1641) 年発行の吉田光由: “新編塵劫記” には、遺題^{いだい}²⁸が載っている。これは演習問題でなく、数学の力を問う難問を、解答なしに提出したものである。これ以来、遺題継承の習慣が生まれる。遺題の研究から数学の道に進んだ人は少なくない。関孝和も沢ロー之²⁹: “古今算法記” (1671)、村瀬義益³⁰: “算法勿憚改”^{うっだんかい} (1673)、磯村吉徳³¹: “算法闕疑抄”^{けつぎしやう} (1684) などの遺題で勉強した。

問 39. 遺題継承とは何か。 ☐

問 40. 吉田光由が新編塵劫記の遺題に関して述べた序文について考えよ。 ☐

問 41. *遺題継承が和算の発展に及ぼした影響について考えよ。 ☐

関孝和やその弟子建部賢弘³²、さらにその他多くの和算家たちの研究によって和算は高度に発達し、一部ではあるがヨーロッパを凌ぐに至る。研究された分野も、図形の問題、方程式論、函数³³の最大最小問題、定積分、整数論など多岐にわたる。

一方、ヨーロッパではデカルトの考案した座標系の考えが普及したのに反して、前述のとおり和算では座標系の考えがみられない。従って函数をグラフ

²⁷ よしだ みつよし, 1598–1672.

²⁸ 遺題という呼び方は明治以後のもので、江戸時代には好^{このみ}と言っていた。

²⁹ さわぐち かずゆき。

³⁰ むらせ よしやす。

³¹ いそむら よしのり。

³² たけべ かたひろ, 1664–1739. 兄の賢之 (かたゆき, 1654–1723), 賢明 (かたあきら, 1661–1716) とともに関孝和に数学を学んだ。

³³ 函数は関数と同じ意味。

で考えることはなく、函数はもっぱら整級数つまり

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

の形のものとして考えている。微分については整式 (多項式) の導函数を求める計算法だけが和算で知られていて、ヨーロッパのような無限小や極限や変化率の考えがない。和算では、定積分は複雑なものが扱われているのに反して、微分の逆演算としての不定積分つまり原始函数という考えがない。このことは例えば積分の計算法に違いをもたらす。ヨーロッパで積分の計算に使われた部分積分法が和算では使われず、被積分函数を級数展開して項別積分する計算がもっぱら使われた。

問 42. *和算における定積分について調べよ。 □

鈎股弦の術 (ピタゴラスの定理) は前述のとおり中国から伝わっていたけれども、日本の数学者たちは独自にその証明を考えている。鈎股弦の術の証明の最初に発表されたのは村瀬義益: “算法勿憚改” (1673) である。関孝和は最初の著作“規矩要明算法”に証明を掲げ、“解見題之法” (1680年代) に別証明を書いている。

和算で円理とよばれる分野がある。円の周囲の長さや面積の計算からはじまり、円の弧の長さや弦の長さとの関係つまり三角函数の研究からやがていろいろな曲線や曲面に関する研究に発展し、定積分や無限級数が扱われる。

円理の問題として、まず円周率の値などが研究された。円周率については 3.16, 3.14, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\sqrt{10}$ などの近似値が、なぜそういう値になるか説明なしに、中国から伝わっていた。なお、歴史を調べるときなど、つぎのことに留意する必要がある。現在では円周率という一つの定数にまとめて扱われているが、かつては円周率、円積率、玉率などが別々の定数とされていた。円周率 (和算では略して周率ともいう) は円周と直径の比である。円の面積と直径の二乗との比が円積率、球の体積と直径の三乗との比が玉率である。例えば塵劫記のある版では円周率は 3.16, 円積率は 0.79, 玉率は $\frac{9}{16}$ としている。円周率、円積率、玉率の間に 12 : 3 : 2 の比になるという相互関係のあるのがわかったのは後のことである。現代では円積率、玉率などの語は使われない。例えば現代の書物に“昔は円周率の値として 3.16 が使われていた”と書いてある場合、円周率が 3.16 であるという史料に基いてるとは限らず、歴史的文献には円積率が 0.79 であるとしてあったのを、わかりやすさのために円周率に換算して示してある場合もあり得る。

問 43. *円積率が円周率の $\frac{1}{4}$ になるのはなぜか。 □

さて、和算家たちは中国伝来の円周率などの近似値を無批判に受け入れることなく、理論的な解明を目指した。まず村松茂清³⁴ が円に内接する正32768角

³⁴むらまつ しげきよ, 1608–1695. 赤穂の浅野家の武士。

形 ($32768 = 2^{15}$) の周囲を計算して近似値

$$3.14159\,26487\,77698\,86924\,8$$

を得た。村松はこの計算結果が何桁まで正しいか確かめることができなかったと思われるが、円周率の近似値として 3.14 と 3.16 とのどちらが妥当かという問題については 3.14 が正しいと述べている。現在は村松の得た値が小数第7位まで正しいとわかっている。

村松の計算は鉤股弦の術つまりピタゴラスの定理だけを繰り返しもちいる方法である。まず、円に内接する正 8 角形の一边の長さを鉤股弦で求める。つぎに、3 以上の任意の整数 n に対して、円に内接する正 n 角形の一边の長さから、内接する正 $2n$ 角形の一边の長さを鉤股弦で求めることができるから、正方形から始めてこれを反復することによって正 8 角形、正 16 角形、... の一边の長さを計算する (辺数倍加法という)。一边の長さから多角形の周囲の長さが求められる。

問 44. *ピタゴラスの定理をもちいて円に内接する正 n 角形の一边の長さから内接する正 $2n$ 角形の一边の長さを求めることができる。その方法について説明せよ。 □

問 45. *村松のやり方にならって円周率の近似値を計算せよ。 □

さて、関孝和はただ内接多角形の周囲の長さで近似するだけでなく、無限数列の収束を加速する画期的な方法でさらに精度の高い近似値を得た。その後、和算家たちはさらに巧妙な加速法や無限級数、定積分などをもちいる方法を発見し、高い精度で円周率を計算している。

まず、関孝和は内接正方形から内接正131072角形 ($131072 = 2^{17}$) までの周囲を計算したあと、数列の収束加速の計算法で

$$3.14159\,26535\,89793\,2386$$

を得ている。これは小数第18位まで正しいが、関もまた自分の得た近似値が何桁まで正しいか知ることができなかった。なお、このとき関がもちいた加速法は、ヨーロッパでは 1926年にエイトケン³⁵が再発見するまで知られていなかった。

鎌田俊清³⁶は内接正多角形、外接正多角形の周囲をそれぞれ計算して、

$$\pi > 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,6658,$$

$$\pi < 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26434\,1667$$

を示した。この結果は彼の著書“宅間流円理”(1722年)に述べてある。計算法としては鉤股弦の応用であるが、村松茂清の方法よりも巧妙であるといわれる(田崎中: “江戸時代の数学”, p.105)。さらに、論理的にみて鎌田俊清の

³⁵A. C. Aitken, 1895–1967.

³⁶かまた としきよ, 1678?–1747.

優れているのは、内接多角形だけでなく外接多角形の周囲の長さも計算し、円周率の下側近似 (真の値より小さい近似値) と上側近似 (真の値より大きい近似値) との両方を求めたことである。二つの近似値を比較して、この値は小数第24位まで正しいことがわかる。

なお、内接多角形と外接多角形の周囲を計算して円周率の近似値を求める方法は、世界ではアルキメデス³⁷が最初にもちいたものである。アルキメデスは正六角形から始めて辺の数を二倍することをくり返し、正 96 角形まで計算して

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

を得ている。小数で表すと

$$\frac{223}{71} = 3.1408450\dots, \quad \frac{22}{7} = 3.1428571\dots$$

であるから、アルキメデスの得た値は小数第2位まで正しい。また、中国の祖沖之³⁸は 5 世紀に

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

を得ていたとだけ伝えられていて、その計算法は知られていないが、おそらく同じような方法をもちいたのであろう³⁹。

鎌田俊清が円周率の上側近似と下側近似との両方を計算したのと同じように、村松茂清は玉率の上側近似と下側近似との両方を計算している。その方法と結果については田崎中: “江戸時代の数学” 第 3 章第 2 節を参照。

建部は内接正方形から内接正1024角形 ($1024 = 2^{10}$) までの周囲を計算し、これに巧妙な加速計算を繰り返して

$$3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,68$$

を得ている。これは小数第41位まで正しい。建部はさらに近似分数

$$\frac{5419351}{1725033}$$

を得ている。これは建部賢明⁴⁰の発見した零約術と呼ばれる方法 (現代の用語でいえば連分数展開) をもちいた結果である。零約術については田崎中: “江戸時代の数学” の pp.99–104 を参照。

有馬頼僮⁴¹はさらに精密な近似分数

$$\frac{428224593349304}{136308125170117}$$

³⁷Archimedes, 287?BC–212BC.

³⁸そ ちゅうし, 429–500. 祖沖之とも書く。

³⁹銭宝琮 (Qián Bǎocōng) 編, 川原秀城^{ひでき} 訳: “中国数学史” (みすず書房, 1990), p.94 参照。

⁴⁰たけべ かたあきら, 賢弘の兄。

⁴¹ありま よりゆき, 1714–1783. 久留米藩主。

を彼の著書に載せている。

なお、円に内接する正多角形の周囲の長さの数列からその極限値を求めるために建部賢弘が考案した加速計算の方法は、ヨーロッパでは二百年ほど後にリチャードソン⁴²によって発見され、前述のエイトケンの方法とともにコンピュータによる数値計算の手法として現代でももちいられている。

また、松永良弼⁴³は無限級数

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \dots$$

を発見しこれをもちいて円周率の値を小数第50位まで正しく求めている。このように、実用計算に必要な精度をはるかに超えた精確さで円周率の値を和算家たちは創意工夫と努力によって求めている。

寺子屋（手習所、手習指南所）でそろばんなど数学の教育がおこなわれて庶民の間に数学が普及し、商業や測量に必要な計算を多くの人々が行っていただけでなく、趣味として楽しむことも早くから行われていた。そろばんによる計算法は、多くの寺子屋で八算までが教えられ、一部では見一まで教えられていたという。一方、趣味的な問題も数学に興味をもたせる題材として教えられていて、塵劫記の中にも趣味的な問題が見られる。算額奉納も関孝和の活躍した時代にはすでに習慣になっていた。算額の問題は概して技巧を凝らした難問、図の美しさなど趣味性が強い。算額奉納という世界に類例のない習慣は日本の誇るべき文化の一つであるが、明治以後急速に失われていったのが惜しまれる。

- 問 46. 八算とは何か。また、見一とは何か。 ☐
- 問 47. 算額とは何か。 ☐
- 問 48. *算額奉納の習慣の意義について考えよ。 ☐
- 問 49. *算額にはどんな問題があるか調べて、その問題を解いてみよ。 ☐
- 問 50. *仮に算額を奉納するとしたらどんなものを作るか。 ☐

関孝和は数式の書き方“傍書法”を初めて考案して、算木と算盤にかわって筆算による代数計算を可能にした。このことは和算の歴史において画期的である。単に算木から筆算へという変化のみに留まらず、数値係数方程式から文字係数方程式へと発展し、したがって多元連立方程式が扱えるようになった。さらに行列式を考案し、これをもちいて多元高次連立方程式を一元高次方程式に還元する一般的な消去法が確立した。関孝和の筆算代数学は演段術または点竄術^{てんざんじゅつ}とよばれる。

- 問 51. *関孝和の傍書法について調べよ。 ☐

今日でも和算の伝統の恩恵をわれわれが受けているのは掛け算九々の暗唱や珠算はもとより、小数の取り扱い、“正”、“負”、“分数”、“円周率”、“方程

⁴²L. F. Richardson, 1881–1953.

⁴³まつなが よしすけ, 1690頃–1744.

式”(和算では方程という)などの用語がある。累乗を意味する“^{べき}冪”とその略字“巾”も和算でもちいられてきたものである。

江戸時代から使われている数学用語については、現代でも同じ意味のものもあるが、明治以降に意味が変わったものもある。江戸時代の原典を読むときには注意が必要である。例えば和算の一倍、二倍などはそれぞれ現代の二倍、三倍などに当たり、和算の二乗、三乗などはそれぞれ現代の三乗、四乗などに当たる。商という語は和算では現代よりも意味が広く、割り算の答に限らず方程式の解などの意味にももちいられた。一方、三角という語は和算では現代よりも意味が狭く、正三角形だけを言う。一般の三角形を和算では三斜というが、この語はいま使われない。円筒を平面で斜めに切った切り口の曲線を関孝和は側円と名づけたが、後に中国から^{たえん}楕円という語が伝わってきて、江戸時代にはどちらも使われたけれども、明治以降は楕円に統一された。20世紀後半から楕円に代わって長円という語も使われている。

問 52. *和算の数学用語を調べて現代の用語と比較せよ。 ☐

問 53. *現代の数学用語のうち和算に由来するものについて調べよ。 ☐

問 54. *寺子屋、手習所における数学教育について調べよ。 ☐

問 55. *和算家の行ったいろいろな数値計算について、コンピューターをもちいて再現を試みよ。 ☐

問 56. *和算家の任意の一人について、その生い立ちや業績について調べよ。 ☐

問 57. *全国を測量して日本地図を作ったことで知られる伊能^{ただなか}忠敬が数学をどのように学んだか調べよ。 ☐

問 58. 和算に関する書物(文学作品なども含む)を読み、その感想を書け。 ☐

問 59. *和算に関する書物(文学作品なども含む)を読み、その書評を書け。 ☐

問 60. *和算のはじまりにヨーロッパの影響があったか否か考えてみよ(一般にヨーロッパの影響がないとみられているけれども、たとえば平山諦:“和算の誕生”では宣教師の伝えた数学の影響を述べている)。 ☐

問 61. *和算とヨーロッパ数学との比較について; 和算が西洋数学とくらべて自然科学とのかかわりや論理性で劣っているという見方がある(たとえば村田全:“日本の数学西洋の数学——比較数学史の試み”)一方、つぎのような意見もある: 西洋数学を基準にして“和算には何々が欠けている”と時代錯誤に批判するのは不毛の議論であり、和算という豊かな伝統について考えるときこのような拙速の判断をしてはならない⁴⁴。

これらの見解に留意して、和算と西洋数学とを比較して考察せよ。 ☐

問 62. *漢字文化圏の数学史について調べよ。 ☐

— 終 —

Copyright ©2002 NAGASHIMA Takashi

⁴⁴フランスの学者 Annick M. Horiuchi の ICM Kyoto 1990 における講演。