

8 和算のその他の話題

日本には6世紀頃に中国からその他のもろもろの学問とともに数学も伝わってきた。その当時のものでいまもひろく知られ実用になっているのは掛け算の九々である。また中国で使われていた正、負、分数などの用語もその当時伝わったと思われる。そのほかに算木と算盤²¹をもちいて平方根を求めたり一元方程式を解いたりする計算法、一次連立方程式の解法、ピタゴラスの定理(現代日本では三平方の定理ともいう)等々や天文・暦学のための数学が中国伝来の教科書をもちいて学ばれていた。

問 31. 算木と算盤について調べよ。 ☐

問 32. *算木と算盤をもちいた計算法について調べよ。 ☐

ピタゴラスの定理は中国で昔から知られていたのが伝えられ、日本では中国伝来の用語で鈎股^{こうこ}の術または鈎股弦^{こうこげん}の術とよばれていた。直角三角形の直角をはさむ二辺のうち短い方を鈎^{こう}²²、長い方を股^こ、斜辺^{せつぺん}を弦^{げん}とよび、鈎股弦とはもともと直角三角形の意味である。

16世紀に朝鮮から中国の数学書が日本に持ち込まれた。その中でも朱世傑²³“算学啓蒙”(1299)と程大位²⁴“算法統宗”(1593)との二つがとくに大きな影響をもたらした。前者には算盤に算木を置いて方程式を解く天元術があり、後者にはそろばんをもちいた計算法が述べてある。17世紀頃にはこれらの書物を読み解くことから、日本の数学の新たな発展が始まる。このころからの日本独自の数学は和算とよばれる。明治維新で学校制度が設けられるとき、数学教育は和算と洋算とのどちらにするか論争があったが、洋算が採用された。これに伴って和算はおとろえていくが、洋算を急速に導入できたのは和算の伝統のおかげであろう。

和算には暦学、商業、土木、建築などへの応用という実用的な側面と実用を離れた趣味的な側面とがある。数学が庶民の道楽の一つであったことは世界の文化史に類例のない特徴である。一方、物理学などと深く関わり合いながら発達したヨーロッパの数学とは対照的に、和算には天文学・暦学以外の自然科学とのかかわりがほとんど見られない。

そろばんについては、毛利重能²⁵が1622年にいわゆる割算書²⁶で計算法を述べたのが、書物としては最初のものと思われる。題のとおり割算の説明から始まっているのは、掛け算までは教科書を見るまでもなく学ばれていたであろう。のちに述べる塵劫記などにももちろんそろばんの使い方が説明してある。一方そろばんの改良も重ねられて、そろばんによる計算はひろく普及し

²¹そろばんにも算盤という字をあてるけれども、さんばんはそろばんとはちがう。

²²異体字の鈎やその略字の勾、また略字の勾も使われる。

²³しゅせいけつ。

²⁴ていだい、1533-1605。

²⁵もうり しげよし、1600頃-1650頃。

²⁶書名が不明であり、最初に割算の説明が述べてあることから一般に割算書とよぶ。

ていった。

問 33. *そろばんの歴史について調べよ。 ☐

問 34. *コンピューターや電卓の普及している現代にそろばんを使う意義があるか考察せよ。 ☐

毛利重能には吉田光由²⁷などのすぐれた弟子たちがいた。和算の初期の書物としては吉田光由の塵劫記^{じんごうき}が 1627 年に出版されて以来、明治初期まで何度も改訂を繰り返し、多くの人々に読まれている。一、十、百、千、万、億、兆、京など 10^{68} までの数の位取りの名称はいまもこの塵劫記に準拠している。

問 35. 数詞 万、億、兆、京、... について調べよ。 ☐

塵劫記由来のものでは ねずみ算 という語がいまもひろく知られている。ねずみ算とはつぎのような問題である。1 月に父母 2 匹のねずみがいて子を 12 匹生む。親子合わせて 14 匹になる。このねずみたち、2 月には子もまた親となって、最初の親とともにそれぞれ子を 12 匹ずつ生む。親と子と孫とを合計して 98 匹になる。このようにしてふえていくとき、一年間で何匹になるか。

問 36. ねずみ算について考えよ。 ☐

問 37. 塵劫記についても調べよ。 ☐

問 38. 塵劫記のねずみ算以外の問題についても考えてみよ。 ☐

寛永十八 (1641) 年発行の吉田光由: “新編塵劫記”には、遺題^{いだい}²⁸が載っている。これは演習問題でなく、数学の力を問う難問を、解答なしに提出したものである。これ以来、遺題継承の習慣が生まれる。遺題の研究から数学の道に進んだ人は少なくない。関孝和も沢ロー之²⁹: “古今算法記” (1671)、村瀬義益³⁰: “算法勿憚改”^{うっだんかい} (1673)、磯村吉徳³¹: “算法闕疑抄”^{けつぎしやう} (1684) などの遺題で勉強した。

問 39. 遺題継承とは何か。 ☐

問 40. 吉田光由が新編塵劫記の遺題に関して述べた序文について考えよ。 ☐

問 41. *遺題継承が和算の発展に及ぼした影響について考えよ。 ☐

関孝和やその弟子建部賢弘³²、さらにその他多くの和算家たちの研究によって和算は高度に発達し、一部ではあるがヨーロッパを凌ぐに至る。研究された分野も、図形の問題、方程式論、函数³³の最大最小問題、定積分、整数論など多岐にわたる。

一方、ヨーロッパではデカルトの考案した座標系の考えが普及したのに反して、前述のとおり和算では座標系の考えがみられない。従って函数をグラフ

²⁷ よしだ みつよし, 1598–1672.

²⁸ 遺題という呼び方は明治以後のもので、江戸時代には好^{このみ}と言っていた。

²⁹ さわぐち かずゆき。

³⁰ むらせ よしやす。

³¹ いそむら よしのり。

³² たけべ かたひろ, 1664–1739. 兄の賢之 (かたゆき, 1654–1723), 賢明 (かたあきら, 1661–1716) とともに関孝和に数学を学んだ。

³³ 函数は関数と同じ意味。

で考えることはなく、函数はもっぱら整級数つまり

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

の形のものとして考えている。微分については整式 (多項式) の導函数を求める計算法だけが和算で知られていて、ヨーロッパのような無限小や極限や変化率の考えがない。和算では、定積分は複雑なものが扱われているのに反して、微分の逆演算としての不定積分つまり原始函数という考えがない。このことは例えば積分の計算法に違いをもたらす。ヨーロッパで積分の計算に使われた部分積分法が和算では使われず、被積分函数を級数展開して項別積分する計算がもっぱら使われた。

問 42. *和算における定積分について調べよ。 □

鈎股弦の術 (ピタゴラスの定理) は前述のとおり中国から伝わっていたけれども、日本の数学者たちは独自にその証明を考えている。鈎股弦の術の証明の最初に発表されたのは村瀬義益: “算法勿憚改” (1673) である。関孝和は最初の著作“規矩要明算法”に証明を掲げ、“解見題之法” (1680年代) に別証明を書いている。

和算で円理とよばれる分野がある。円の周囲の長さや面積の計算からはじまり、円の弧の長さと弦の長さとの関係つまり三角函数の研究からやがていろいろな曲線や曲面に関する研究に発展し、定積分や無限級数が扱われる。

円理の問題として、まず円周率の値などが研究された。円周率については 3.16, 3.14, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\sqrt{10}$ などの近似値が、なぜそういう値になるか説明なしに、中国から伝わっていた。なお、歴史を調べるときなど、つぎのことに留意する必要がある。現在では円周率という一つの定数にまとめて扱われているが、かつては円周率、円積率、玉率などが別々の定数とされていた。円周率 (和算では略して周率ともいう) は円周と直径の比である。円の面積と直径の二乗との比が円積率、球の体積と直径の三乗との比が玉率である。例えば塵劫記のある版では円周率は 3.16, 円積率は 0.79, 玉率は $\frac{9}{16}$ としている。円周率、円積率、玉率の間に 12 : 3 : 2 の比になるという相互関係のあるのがわかったのは後のことである。現代では円積率、玉率などの語は使われない。例えば現代の書物に“昔は円周率の値として 3.16 が使われていた”と書いてある場合、円周率が 3.16 であるという史料に基いてるとは限らず、歴史的文献には円積率が 0.79 であるとしてあったのを、わかりやすさのために円周率に換算して示してある場合もあり得る。

問 43. *円積率が円周率の $\frac{1}{4}$ になるのはなぜか。 □

さて、和算家たちは中国伝来の円周率などの近似値を無批判に受け入れることなく、理論的な解明を目指した。まず村松茂清³⁴ が円に内接する正32768角

³⁴むらまつ しげきよ, 1608–1695. 赤穂の浅野家の武士。

形 ($32768 = 2^{15}$) の周囲を計算して近似値

$$3.14159\,26487\,77698\,86924\,8$$

を得た。村松はこの計算結果が何桁まで正しいか確かめることができなかったと思われるが、円周率の近似値として 3.14 と 3.16 とのどちらが妥当かという問題については 3.14 が正しいと述べている。現在は村松の得た値が小数第7位まで正しいとわかっている。

村松の計算は鉤股弦の術つまりピタゴラスの定理だけを繰り返しもちいる方法である。まず、円に内接する正 8 角形の一边の長さを鉤股弦で求める。つぎに、3 以上の任意の整数 n に対して、円に内接する正 n 角形の一边の長さから、内接する正 $2n$ 角形の一边の長さを鉤股弦で求めることができるから、正方形から始めてこれを反復することによって正 8 角形、正 16 角形、... の一边の長さを計算する (辺数倍加法という)。一边の長さから多角形の周囲の長さが求められる。

問 44. *ピタゴラスの定理をもちいて円に内接する正 n 角形の一边の長さから内接する正 $2n$ 角形の一边の長さを求めることができる。その方法について説明せよ。 □

問 45. *村松のやり方にならって円周率の近似値を計算せよ。 □

さて、関孝和はただ内接多角形の周囲の長さで近似するだけでなく、無限数列の収束を加速する画期的な方法でさらに精度の高い近似値を得た。その後、和算家たちはさらに巧妙な加速法や無限級数、定積分などをもちいる方法を発見し、高い精度で円周率を計算している。

まず、関孝和は内接正方形から内接正131072角形 ($131072 = 2^{17}$) までの周囲を計算したあと、数列の収束加速の計算法で

$$3.14159\,26535\,89793\,2386$$

を得ている。これは小数第18位まで正しいが、関もまた自分の得た近似値が何桁まで正しいか知ることができなかった。なお、このとき関がもちいた加速法は、ヨーロッパでは 1926年にエイトケン³⁵が再発見するまで知られていなかった。

鎌田俊清³⁶は内接正多角形、外接正多角形の周囲をそれぞれ計算して、

$$\pi > 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,6658,$$

$$\pi < 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26434\,1667$$

を示した。この結果は彼の著書“宅間流円理”(1722年)に述べてある。計算法としては鉤股弦の応用であるが、村松茂清の方法よりも巧妙であるといわれる(田崎中: “江戸時代の数学”, p.105)。さらに、論理的にみて鎌田俊清の

³⁵A. C. Aitken, 1895–1967.

³⁶かまた としきよ, 1678?–1747.

優れているのは、内接多角形だけでなく外接多角形の周囲の長さも計算し、円周率の下側近似 (真の値より小さい近似値) と上側近似 (真の値より大きい近似値) との両方を求めたことである。二つの近似値を比較して、この値は小数第24位まで正しいことがわかる。

なお、内接多角形と外接多角形の周囲を計算して円周率の近似値を求める方法は、世界ではアルキメデス³⁷が最初にもちいたものである。アルキメデスは正六角形から始めて辺の数を二倍することをくり返し、正 96 角形まで計算して

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

を得ている。小数で表すと

$$\frac{223}{71} = 3.1408450\dots, \quad \frac{22}{7} = 3.1428571\dots$$

であるから、アルキメデスの得た値は小数第2位まで正しい。また、中国の祖冲之³⁸は 5 世紀に

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

を得ていたとだけ伝えられていて、その計算法は知られていないが、おそらく同じような方法をもちいたのであろう³⁹。

鎌田俊清が円周率の上側近似と下側近似との両方を計算したのと同じように、村松茂清は玉率の上側近似と下側近似との両方を計算している。その方法と結果については田崎中: “江戸時代の数学” 第 3 章第 2 節を参照。

建部は内接正方形から内接正1024角形 ($1024 = 2^{10}$) までの周囲を計算し、これに巧妙な加速計算を繰り返して

$$3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,68$$

を得ている。これは小数第41位まで正しい。建部はさらに近似分数

$$\frac{5419351}{1725033}$$

を得ている。これは建部賢明⁴⁰の発見した零約術と呼ばれる方法 (現代の用語でいえば連分数展開) をもちいた結果である。零約術については田崎中: “江戸時代の数学” の pp.99–104 を参照。

有馬頼僊⁴¹はさらに精密な近似分数

$$\frac{428224593349304}{136308125170117}$$

³⁷Archimedes, 287?BC–212BC.

³⁸そ ちゅうし, 429–500. 祖冲之とも書く。

³⁹銭宝琮 (Qián Bǎocōng) 編, 川原秀城^{ひでき} 訳: “中国数学史” (みすず書房, 1990), p.94 参照。

⁴⁰たけべ かたあきら, 賢弘の兄。

⁴¹ありま よりゆき, 1714–1783. 久留米藩主。

を彼の著書に載せている.

なお, 円に内接する正多角形の周囲の長さの数列からその極限値を求めるために建部賢弘が考案した加速計算の方法は, ヨーロッパでは二百年ほど後にリチャードソン⁴²によって発見され, 前述のエイトケンの方法とともにコンピュータによる数値計算の手法として現代でももちいられている.

また, 松永良弼⁴³は無限級数

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \dots$$

を発見しこれをもちいて円周率の値を小数第50位まで正しく求めている. このように, 実用計算に必要な精度をはるかに超えた精確さで円周率の値を和算家たちは創意工夫と努力によって求めている.

寺子屋 (手習所, 手習指南所) でそろばんなど数学の教育がおこなわれて庶民の間に数学が普及し, 商業や測量に必要な計算を多くの人々が行っていただけでなく, 趣味として楽しむことも早くから行われていた. そろばんによる計算法は, 多くの寺子屋で八算までが教えられ, 一部では見一まで教えられていたという. 一方, 趣味的な問題も数学に興味をもたせる題材として教えられていて, 塵劫記の中にも趣味的な問題が見られる. 算額奉納も関孝和の活躍した時代にはすでに習慣になっていた. 算額の問題は概して技巧を凝らした難問, 図の美しさなど趣味性が強い. 算額奉納という世界に類例のない習慣は日本の誇るべき文化の一つであるが, 明治以後急速に失われていったのが惜まれる.

問 46. 八算とは何か. また, 見一とは何か. ☐

問 47. 算額とは何か. ☐

問 48. *算額奉納の習慣の意義について考えよ. ☐

問 49. *算額にはどんな問題があるか調べて, その問題を解いてみよ. ☐

問 50. *仮に算額を奉納するとしたらどんなものを作るか. ☐

関孝和は数式の書き方“傍書法”を初めて考案して, 算木と算盤にかわって筆算による代数計算を可能にした. このことは和算の歴史において画期的である. 単に算木から筆算へという変化のみに留まらず, 数値係数方程式から文字係数方程式へと発展し, したがって多元連立方程式が扱えるようになった. さらに行列式を考案し, これをもちいて多元高次連立方程式を一元高次方程式に還元する一般的な消去法が確立した. 関孝和の筆算代数学は演段術または点竄術^{てんざんじゅつ}とよばれる.

問 51. *関孝和の傍書法について調べよ. ☐

今日でも和算の伝統の恩恵をわれわれが受けているのは掛け算九々の暗唱や珠算はもとより, 小数の取り扱い, “正”, “負”, “分数”, “円周率”, “方程

⁴²L. F. Richardson, 1881–1953.

⁴³まつなが よしすけ, 1690頃–1744.

式”(和算では方程という)などの用語がある。累乗を意味する“^{べき}冪”とその略字“巾”も和算でもちいられてきたものである。

江戸時代から使われている数学用語については、現代でも同じ意味のものもあるが、明治以降に意味が変わったものもある。江戸時代の原典を読むときには注意が必要である。例えば和算の一倍、二倍などはそれぞれ現代の二倍、三倍などに当たり、和算の二乗、三乗などはそれぞれ現代の三乗、四乗などに当たる。商という語は和算では現代よりも意味が広く、割り算の答に限らず方程式の解などの意味にももちいられた。一方、三角という語は和算では現代よりも意味が狭く、正三角形だけを言う。一般の三角形を和算では三斜というが、この語はいま使われない。円筒を平面で斜めに切った切り口の曲線を関孝和は側円と名づけたが、後に中国から^{たえん}楕円という語が伝わってきて、江戸時代にはどちらも使われたけれども、明治以降は楕円に統一された。20世紀後半から楕円に代わって長円という語も使われている。

問 52. *和算の数学用語を調べて現代の用語と比較せよ。 ☐

問 53. *現代の数学用語のうち和算に由来するものについて調べよ。 ☐

問 54. *寺子屋、手習所における数学教育について調べよ。 ☐

問 55. *和算家の行ったいろいろな数値計算について、コンピューターをもちいて再現を試みよ。 ☐

問 56. *和算家の任意の一人について、その生い立ちや業績について調べよ。 ☐

問 57. *全国を測量して日本地図を作ったことで知られる伊能^{ただなか}忠敬が数学をどのように学んだか調べよ。 ☐

問 58. 和算に関する書物(文学作品なども含む)を読み、その感想を書け。 ☐

問 59. *和算に関する書物(文学作品なども含む)を読み、その書評を書け。 ☐

問 60. *和算のはじまりにヨーロッパの影響があったか否か考えてみよ(一般にヨーロッパの影響がないとみられているけれども、たとえば平山諦:“和算の誕生”では宣教師の伝えた数学の影響を述べている)。 ☐

問 61. *和算とヨーロッパ数学との比較について; 和算が西洋数学とくらべて自然科学とのかかわりや論理性で劣っているという見方がある(たとえば村田全:“日本の数学西洋の数学——比較数学史の試み”)一方、つぎのような意見もある: 西洋数学を基準にして“和算には何々が欠けている”と時代錯誤に批判するのは不毛の議論であり、和算という豊かな伝統について考えるときこのような拙速の判断をしてはならない⁴⁴。

これらの見解に留意して、和算と西洋数学とを比較して考察せよ。 ☐

問 62. *漢字文化圏の数学史について調べよ。 ☐

— 終 —

Copyright ©2002 NAGASHIMA Takashi

⁴⁴フランスの学者 Annick M. Horiuchi の ICM Kyoto 1990 における講演。