

## 4 三元一次連立方程式と三次の行列式

三元一次連立方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (3)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (4)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (5)$$

を二元の場合と同じように消去法で解いてみると,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

のときに限り解が一組に確定して, その解  $x_1, x_2, x_3$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{aligned}$$

となることがわかる. その計算はつぎのとおりである. 方程式 (3) の  $a_{23}$  倍から方程式 (4) の  $a_{13}$  倍を引いて  $x_3$  を消去すると

$$(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}.$$

同様に (3) と (5) から  $x_3$  を消去すると

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}.$$

この二つの方程式からさらに  $x_2$  を消去すると

$$a_{13}Dx_1 = a_{13}D_1,$$

ただし

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

ここで場合を分ける.  $a_{13} \neq 0$  の場合は  $Dx_1 = D_1$  である.  $a_{13} = 0$  の場合はふたたびもとの三元連立方程式を考える. (3) は  $x_1$  と  $x_2$  だけの方程式になっているから, (4) と (5) から  $x_3$  を消去して得られる

$$(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_1 + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})x_2 = b_2a_{33} - b_3a_{23}$$

と連立して  $x_2$  を消去して  $Dx_1 = D_1$  が得られる. 従って  $a_{13} \neq 0$  の場合も  $a_{13} = 0$  の場合も

$$Dx_1 = D_1$$

である. ゆえに,  $D \neq 0$  ならば  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ .  $x_2, x_3$  についても同様.

問 8. 上の計算の詳細を補え. □

**三次行列式.** さて, この  $x_1, x_2, x_3$  に共通の分母

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

のような式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

とあらわして, 三次の行列式という. 行列式をもちいれば, 上にあげた三元一次連立方程式の解は,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のとき

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

とあらわせる. これが三元の場合のクラメルの公式である. また,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

のときには方程式は不定または不能である.

三次の行列式についても二次の場合と同様な法則がなりたつ (後述). さて,

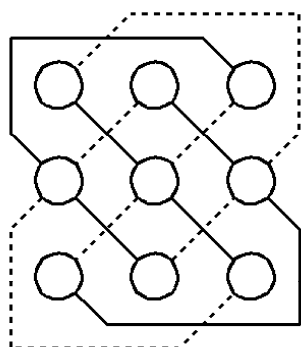
三次の行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を計算するには

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

を計算する, つまり行列式の要素を斜めにかけ合わせ, 左上から右下への積は +, 右上から左下への積は - として, 合計すればよい. この計算法を “関-サリュウの規則”<sup>13</sup> と言う. これは関孝和の著書 “<sup>かいふくだいのほう</sup>解伏題之法” (1683) の中に述べてあるが, ヨーロッパではサリュウ<sup>14</sup>の発見とみなされている.

<sup>13</sup>一般にサリュウの規則またはサラスの規則と呼ばれている.

<sup>14</sup>Pierre F. Sarrus, 1798–1861.



実線は +, 点線は -. 解伏題之法ではそれぞれ赤線と黒線で, + は生, - は尅と書いてある. なお, 和算では数式を縦書きにするから, 解伏題之法では符号がこの図と反対になっている.

図 1: 関-サリュウの規則

例 2.  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3.$  □

問 9.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  を計算せよ. □

問 10.  $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$  を確かめよ. □

問 11.  $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を示せ. □

四次以上の行列式については関-サリュウの規則のような計算法を適用することはできない. 二次, 三次の場合から誤った類推で四次の行列式を計算しないように注意すること.

四次以上の行列式にも当てはまる一般的な計算法は, 関孝和の“解伏題之法”にある交式斜乘法が世界で最初のものであるが, この方法は繁雑である. 井関知辰の著書“<sup>さんぼうはつき</sup>算法發揮”に初めて発表され, ヨーロッパでも後にヴァンデルモンドが再発見した方法, つまり余因子によって展開するのがわかりやすい.

## 5 四次以上の行列式, 余因子と井関-ヴァンデルモンドの方法

一般に  $n^2$  個の数を  $n \times n$  の正方形に配列した

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の形のものを  $n$  次行列式という. この行列式の第  $i$  行と第  $j$  列とを取り除いてできる  $n-1$  次行列式の  $(-1)^{i+j}$  倍を, 第  $i$  行第  $j$  列余因子<sup>15</sup>という. なお,

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & (i+j \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (i+j \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

である.

例 3.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  の第 1 行第 1 列余因子は  $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4$ , 第 1 行第 2 列余因子は  $-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$ , 第 1 行第 3 列余因子は  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$  である.  $\square$

いま  $n$  次行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の第  $i$  行第  $j$  列余因子を仮に  $A_{ij}$  であらわすと,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

がなりたつ. つまり第 1 行の要素と第 1 行の余因子との積和がもとの行列式に等しい. これを, 第 1 行での展開という. 第 2 行での展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$

<sup>15</sup>余因数ともいう. 英語は cofactor.

なども同様になりたつ. また, 行に関してなりたつことは列に関してもなりたつから,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

がなりたつ. これは第 1 列での展開である. 同様に第 2 列などでも展開できる. このように余因子をもちいて行または列で展開するのが井関-ヴァンデルモンド<sup>16</sup>の方法である. 三次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

の第  $i$  行第  $j$  列余因子 ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ) を  $A_{ij}$  とし井関-ヴァンデルモンドの展開式を例示すると:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \quad D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \quad D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

左の三つは第 1, 2, 3 行での展開であり, 右の三つは第 1, 2, 3 列での展開である.

例 4.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$  (第 1 行で展開).  $\square$

問 12.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  を第 2 行で展開して値を求めよ. また, 第 1 列で展開して値を求め, 同じ値になることを確かめよ.  $\square$

問 13.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$  を第 1 行で展開して値を求めよ.  $\square$

問 14.  $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$  の第 1 行の各列の余因子を計算せよ.  $\square$

<sup>16</sup>一般にヴァンデルモンドの展開とよばれている

問 15.  $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$  を第 1 行で展開し, この行列式が  $(a+2)(a-1)^2$  に等しいことを確かめよ. □

井関-ヴァンデルモンドの展開法をもちいれば行列式の計算は一つ次数の低い行列式の計算に還元できる. たとえば三次行列式の展開には三次行列式の余因子を三つ計算すればよく, その余因子はおのこの二次行列式であらわされる. 四次以上の行列式についても同様に余因子の計算に還元できるから, 井関-ヴァンデルモンドの展開法を繰り返すことで次数を下げて計算できる.

つぎに, 主対角線, 三角行列式を定義する.  $n$  次行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の左上から右下に至る要素の並び  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  を**主対角線**という. 主対角線の左下の要素がすべて 0 である行列式および主対角線の右上の要素がすべて 0 である行列式をどちらも**三角行列式**と呼ぶ. 三角行列式の値はその主対角線要素全部の積に等しい. たとえば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

問 16. このことを確かめよ. □

井関-ヴァンデルモンドの展開では, 同じ行の要素と余因子との積和を作った. それでは, 異なる行の要素と余因子との積和はどうなるであろうか.

例 5.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  の第 2 行要素と第 1 行余因子との積和は

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 0 \text{ である. } \quad \square$$

要素と余因子との積和についての一般論は後に述べる.

問 17.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  の第 1 行要素と第 3 行余因子との積和を計算せよ. □