

## 2 鶴亀算, 一次連立方程式, 消去法, 不定と不能

**例題.** 鶴と亀と合わせて 10 匹, その足の数は合わせて 28 本ある. 鶴と亀とそれぞれの数を求めよ.  $\square$

このような問題を鶴亀算という. 算数の問題としては難問であるけれども, 代数では簡単な連立方程式の問題になる. なお, 鶴亀算という呼び名は 1800 年頃から和算で使われるようになったもので, もともとは中国から伝わった雉と兎の問題である.

鶴が  $x$  匹, 亀が  $y$  匹いるとすると, 問題の条件はつぎの二つの式で記述できる.

$$x + y = 10, \quad (1)$$

$$2x + 4y = 28. \quad (2)$$

これは  $x$  と  $y$  とに関する二元一次連立方程式である. なお, 二元とは未知数が二つあることの意味である.

この方程式を解くには, 未知数の一つを消去して一元一次方程式にする. 例えばつぎのように計算する. (2) 式から (1) 式の 2 倍を引くと

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 28 \\ 2x + 2y = 20 \\ \hline 2y = 8 \end{array}$$

となって  $x$  が消去でき,  $y = 4$  が得られる. これを (1) 式に代入して  $x + 4 = 10$ , ゆえに  $x = 6$  を得る. 従って, 答 鶴 6 匹, 亀 4 匹.  $\square$

一般に二元一次連立方程式は, 上の例のようにそれぞれの方程式をおのこの定数倍して差を取って, 一方の未知数を消去できる. 三元以上の一次連立方程式の場合はのちに述べるが, 同様な計算で未知数をひとつずつ消去することの繰り返しで解ける.

なお, 鶴亀算という応用問題の場合には, 方程式を解くとともに答が 0 または正の整数でなければならないという条件に留意する.

**例 1.** 鶴と亀と合わせて 4 匹, その足の数が合わせて 2 本という問題は, 鶴亀算として不適である.  $\square$

**問 1.** \*鶴と亀と合わせて  $a$  匹, その足の数が合わせて  $b$  本という問題が鶴亀算として適当である (つまり鶴の数と亀の数がいずれも負でない整数になる) ためには,  $a$  が整数で  $b$  が偶数で  $a \geq 0$  であり,  $2a \leq b \leq 4a$  であることが必要十分である.  $\square$

ここからは, 答が負でないまたは答が整数であるなどの条件なしに連立方程式を考えることにする.

## 問 2. 二元一次連立方程式

$$2x + 3y = 7,$$

$$3x + 2y = 5$$

を解け.



**不定と不能.** まず, つぎの二元一次連立方程式を考えてみる.

$$x + y = 10,$$

$$4x + 4y = 40.$$

例えば  $x = 1, y = 9$  でも  $x = 17.5, y = -7.5$  でもこの連立方程式はみたされて, 解があるけれども一組に確定しない. この例のように解が一組に決まらない場合のことを, 連立方程式が**不定**であるという.

もう一つ, つぎの二元一次連立方程式を考えてみる.

$$x + y = 10,$$

$$4x + 4y = 28.$$

この場合は  $x, y$  にどんな数を代入しても両方の方程式が同時にみたされることはない. この例のように解がまったくない場合のことを, 連立方程式が**不能**であるという.

## 問 3. 二元一次連立方程式

$$ax + by = 0,$$

$$cx + dy = 0$$

は, 係数  $a, b, c, d$  の値によって, 不定になることはあるけれども, 不能になることは決してない. 

二元一次連立方程式の場合には解が確定するかあるいは不定または不能であるか方程式を見てすぐわかるけれども, 三元以上になるとすぐに見て取れるとは限らない. 従って不定や不能の場合を判別する問題がたいせつになる. また, 不定の場合といえども解が不規則にたくさんあるわけではなく全体として整然とした構造をなしていて, その構造 (解の集合) を考えることが線型代数学のたいせつな問題である. ただしこの講義では解の集合の問題は扱わない.

### 3 二元一次連立方程式の解の公式、二次の行列式

**解の一般の形.** 二元一次連立方程式の解の公式を作ってみる. なお, 連立方程式について, 未知数の個数と方程式の数とは必ずしも同じでなくてもよいが, ここでは一致している場合だけを考える. つまり二元の場合は方程式も二つあるとする.

二元一次連立方程式の解の公式を求めるために, 方程式の係数も定数項も文字で表して, つぎの連立方程式を考える.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

消去法で解いてみる. 第一式を  $d$  倍, 第二式を  $b$  倍して差をとれば

$$\begin{array}{rcl} adx & + & bdy = de \\ bcdx & + & bdy = bf \\ \hline (ad - bc)x & & = de - bf \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$  の場合<sup>12</sup>は  $x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$  が得られる.  $y$  を求めるにはこれを第一式と第二式とにそれぞれ代入するか, あるいは  $x$  を求めたのと同様な消去法をふたたびもちいる.  $ad - bc \neq 0$  の場合,  $y = \frac{af - ec}{ad - bc}$  が得られる.

**問 4.** 上の式を導く計算を, 場合分けに注意して実行せよ. □

逆に, これらの  $x, y$  をもとの連立方程式に代入してみれば, 方程式のみたされることが確かめられる.

**問 5.** このことを確かめよ. □

従って,  $ad - bc \neq 0$  の場合は解が一組だけ定まり, 解は

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

とあらわせる. これを**クラームルの公式**という. なお, 理由は略すが,  $ad - bc = 0$  の場合には, 方程式は不定または不能になる. 不定と不能とのどちらになるかの見分け方についてはあとで述べる.

**行列式.** 解の公式に繰り返し現れる  $ad - bc$  のような形の式を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

とあらわして, 二次の**行列式**という.  $a, b, c, d$  をその行列式の**要素**という. 要素の横の並びを**行**といい, 縦の並びを**列**という. 一般に行列式の行の数と列の数とは必ず等しく, 等しいその数を行列式の**次数**という. 次数が  $n$  であるとき,  $n$  次の行列式という.

<sup>12</sup>≠ は“等しくない”の意味.

行は上から順に, 列は左から順に, それぞれ番号をつける.  $(a, b)$  を第 1 行,  $(c, d)$  を第 2 行という.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  を第 1 列,  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  を第 2 列という. 要素をその位置する行と列との番号であらわす. 例えば要素  $b$  を第 1 行第 2 列要素という. **添数と二重添数.** 行列式の要素をあらわすのに, 第  $i$  行第  $j$  列要素を

$$a_{ij}$$

などのように**二重添数**をもちいてあらわすのが便利である. 二次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

とあらわせる.

連立方程式の未知数も  $x, y$  よりも  $x_1, x_2$  と添数をもちいてあらわすのが便利である. 定数項に関しても同様である.

二元一次連立方程式を, 添数をもちいて

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

と書きなおして, 解を行列式であらわすとつぎのとおりになる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ の場合には解が一組に確定して, 解は}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

である (クラームの公式).  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$  の場合には方程式は不能または不定である. この場合, 詳しくはつぎのとおりである: 二つの行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

の値が両方とも 0 ならば方程式は不定であり, 少なくとも一つが 0 でないならば方程式は不能である.

**問 6.** 最初にあげた鶴亀算の問題を, 行列式を使って解け.

□

**二次の行列式の基本法則.** 二次の行列式について, つぎの法則がなりたつ.

1. 行番号と列番号との一致する位置の要素が 1 で, その他の要素が 0 である行列式の値は 1 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. 二つの列を入れ替えると行列式の値は  $-1$  倍になる. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. 一つの列の各要素を  $c$  倍すると行列式の値は  $c$  倍になる. 言い替えれば一つの列の各要素の共通因数はくくり出せる. すなわち

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. 一つの列の各要素が二つの数の和であるとき, 行列式の値はつぎのとおり二つの行列式の和として表せる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

論理的には以上の法則だけから二次の行列式の性質はすべて導かれる. その意味ではこれだけで十分とも言えるが, 実際にはそのほかにつぎの法則もよく使われるので, 知っておくに値する.

5. 転置することによって行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

従って, 列に関してなりたつことは行に関してもなりたつ.

6. 二つの列の一致する行列式の値は 0 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

7. 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ca_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ca_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

問 7. それぞれの法則の正しいことを示せ.

□