

コンピュータ・サイエンス1

第8回

コンピュータでの情報の扱い方(4)

人間科学科コミュニケーション専攻

白銀 純子

■ ■ ■ 第8回の内容

- コンピュータでの情報の扱い方(4)

■ 前回の出席問題の解答

- 数を6桁の2進数で表しているコンピュータがある。このとき、以下の数のなかで、オーバーフローしている数はどれか、全て答えなさい。

1. 00110 ← 5桁
2. 11001 ← 5桁
3. 1010111 ← 7桁
4. 010101 ← 6桁
5. 111000 ← 6桁
6. 101 ← 3桁
7. 1111111111 ← 10桁

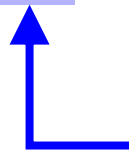
解答: 3, 7

■ ■ ■ 前回の出席問題の解答

- 設問2: 「やってみよう」の10進数 $\Leftrightarrow$ 16進数の変換問題の1. と4. の計算結果を報告すること
 - 1. の問題: 10進数の「240」を16進数に

$$\begin{array}{r} 16 \overline{) 240} \\ 16 \overline{) 15} \cdots \text{余り: } 0 \\ 0 \cdots \text{余り: } 15 \end{array}$$


15 0



10以上の余りはA～Fに置き換え

➤ $(15)_{10} = (F)_{16}$

解答: $(F0)_{16}$

■ ■ ■ 前回の出席問題の解答

- 設問2: 「やってみよう!」の10進数 $\Leftrightarrow$ 16進数の変換問題の1. と4. の計算結果を報告すること
 - 1. の問題: 16進数の「64」を10進数に

$$\begin{array}{r} 16^1 \quad 16^0 \\ \times \quad \times \\ 6 \quad 4 \end{array}$$



$$\begin{aligned} & 6 \times 16^1 + 4 \times 16^0 \\ &= 6 \times 16 + 4 \times 1 \\ &= 96 + 4 \\ &= 100 \end{aligned}$$

解答: $(100)_{10}$

■ 前回の質問の回答

■ ■ ■ ■ 24進数・32進数

- XX進数はいくつでもあり
- コンピュータ関係で出てくるのは、2進数・16進数がほとんど

練習問題の解答

- 授業の資料のページの「練習問題」の欄
 - 練習問題を出した次の回の授業の前までに掲載
 - 練習問題を出した回の「練習問題」の欄のリンク先に掲載
 - Ex. 第7回で出した問題の解答は、第7回の資料の「練習問題」の欄のリンク

Question!

前回の復習

負の数の表現[1](p. 9)

- コンピュータでの計算は、全て足し算
 - コンピュータでの計算は、電気回路で実行
 - 電気回路: 電気が通る線を組み合わせて、様々な処理をするためのもの(コンピュータを構成する最も基本的な部品)
 - 足し算, 引き算, かけ算, 割り算をするには、それぞれのために専用の回路が必要
 - 足し算専用回路, 引き算専用回路, かけ算専用回路, 割り算専用回路
- 経済的に良くない



足し算専用回路(加算器)を
組み合わせて他の計算をカバー

負の数の表現[2](p. 9)

- 足し算の組み合わせで他の計算も行う
 - 引き算: 「 $a-b$ 」を、「 $a+(-b)$ 」(b を負数と考える)
 - かけ算: 足し算の繰り返しとして計算
 - 割り算: 引き算の繰り返しとして計算

コンピュータでも負数を扱う

- 方法1: 真数表現
- 方法2: 2の補数表現

真数表現(p. 9)

- 数を表す2進数は符号(+ or -)を表す1ビットを付加
 - 数の先頭のビットで符号を表す
 - 0が「+」、1が「-」を表す

「符号ビット」と呼ぶ

10進数	2進数
-3	1 0 1 1
-2	1 0 1 0
-1	1 0 0 1
-0	1 0 0 0
+0	0 0 0 0
+1	0 0 0 1
+2	0 0 1 0
+3	0 0 1 1

符号ビット

数を表す部分

0が「+0」と「-0」の
2種類できてしまう

具合が悪いので
真数表現はあまり使われない

2の補数とは？

- そもそも「補数」とは: ある数Nに足したときに桁が1つ上がる数
 - 2進数に限らず、どんなN進数であっても、「補数」は存在
 - 2進数での補数が「2の補数」

5桁の数XXXXXに対して...

➤ $XXXXX + YYYYY = 100000$
となるとき、「XXXXX」の補数が「YYYYY」

➤ Ex. 2進数で「01001」だと...
 $01001 + 10111 = 100000$ なので、「01001」の補数は「10111」

2の補数をマイナスの数として扱うと...

➤ 5桁の計算の例: $(01001)_2 + (10111)_2 = (100000)_2 \rightarrow (00000)_2$ (オーバーフロー)
✓ $(01001)_2 = (9)_{10}$, $(10111)_2 = (-9)_{10}$ なので、 $(9)_{10} + (-9)_{10} = (0)_{10}$
なので、計算がきちんとできている!

2の補数表現[1](p. 9)

- 負の数Nを、正の数N(2進数)の0と1を反転させて1を加えた数で表現する方法
 - 0と正の整数(自然数)は、そのまま表現(この計算はしない)

Ex.

$(-10)_{10}$

「10」を2進数にして
「-」をつけたもの

$= (-01010)_2$

$\rightarrow (10101 + 1)_2 = (10110)_2$

「-01010」の「-」をとって
「1」と「0」を逆にしたもの

$(-10)_{10}$ の2進数
(2の補数表現)

2の補数表現[2](p. 9)

- 2の補数 = 負の数を2進数で表現したもの(コンピュータの世界では)
- 計算方法(例: -20を10桁の2進数に直す)
 1. 2の補数に直したい10進数のマイナスを取り除く
 - $(-20)_{10} \rightarrow (20)_{10}$
 2. 1. の結果を2進数に直す
(この時点で桁数あわせ!! 後で桁数あわせをすると、合わせ方を間違えやすい)
 - $(20)_{10} = (0000010100)_2$
 3. 2. の結果の0と1を逆にする(0の桁を1、1の桁を0にする)

0 0 0 0 0 1 0 1 0 0



1 1 1 1 1 0 1 0 1 1

2の補数表現[2](p. 9)

- 2の補数 = 負の数を2進数で表現したもの(コンピュータの世界では)
- 計算方法(例: -20を10桁の2進数に直す)
 3. の結果に1を足し算する

$$\begin{array}{r} 1111101011 \\ +) \quad \quad \quad 1 \\ \hline 1111101100 \end{array}$$

-20を2進数に直した結果
(2の補数 = 2進数での負の数の表現)

2進数での負の数の表現では、
「-」の記号はつけない

2の補数表現の利点(p. 10)

- 引き算(符号付きの足し算)をそのまま足し算として処理できる

Ex.

$$(10 + 3)_{10} = (1010 + 0011)_2 = (01101)_2 = (13)_{10}$$

$$(6 - 3)_{10} = (110 + \boxed{101})_2 = (1011)_2 \rightarrow (011)_2 \text{ (オーバーフロー)} = (3)_{10}$$



「-3」の2の補数表現



真数表現: 符号付きの足し算を処理するには、別の回路が必要
(単純に足すことはできない)

2の補数を10進数に変換[1]

- 2の補数から1を引き、0と1を反転させて10進数になおして「-」をつける
 - 負の数を2の補数に変換するときの逆
 - この計算は、負の数だけ

Ex.

$(110110)_2$

2の補数から1を
引いたもの

→ $(110110 - 1)_2 = (110101)_2$

→ $(-001010)_2$

「110101」の0と1を
逆にしたもの

$(110110)_2$ (2の
補数)の10進数

= $(-10)_{10}$

2の補数を10進数に変換[2]

- 計算方法(例: 1111101100を10進数に直す)

1. 2の補数から1を引き算する

$$\begin{array}{r} 1111101100 \\ -) 1 \\ \hline 1111101011 \end{array}$$

2. 1. の結果の0と1を逆にする(0の桁を1、1の桁を0にする)

$$\begin{array}{c} 1111101011 \\ \downarrow \\ 0000010100 \end{array}$$

※2の補数→10進数の方法は、10進数→2の補数の逆

2の補数を10進数に変換[2]

■ 計算方法(例: 1111101100を10進数に直す)

1.2. の結果を10進数に直す

■ $(0000010100)_2 = (20)_{10}$

2.3. の結果に-(マイナス)をつける

■ $(20)_{10} \rightarrow (-20)_{10}$

1111101100を
10進数に直した数

※2の補数→10進数の方法は、10進数→2の補数の逆

2進数の引き算[1]

■ 10進数の引き算だと...

- ある桁の引かれる数が引く数より小さければ、1つ大きな桁から10を借りる
 - 10を借りる: 貸した桁から1を引き、借りた桁に10を足す

$$\begin{array}{r} 10\text{を借りる} \\ \begin{array}{r} 100 \\ -) \quad 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 10\text{を借りる} \\ \begin{array}{r} 0100 \\ -) \quad 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \begin{array}{r} 0910 \\ -) \quad 1 \\ \hline 099 \end{array} \end{array}$$

引き算の答え: 99

2進数の引き算[2]

■ 2進数の引き算だと...

- ある桁の引かれる数が引く数より小さければ、1つ大きな桁から $(10)_2$ (10進数で2) を借りる
 - 2を借りる: 貸した桁から1を引き、借りた桁に2を足す

2(2進数で10)を借りる

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0 \\ -) 0\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$



2(2進数で10)を借りる

$$\begin{array}{r} 0\ 2\ 0 \\ -) 0\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 2 \\ -) 0\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1 \end{array}$$



引き算の答え: 011

※コンピュータ的には引き算はしないので、人間が2の補数→10進数の計算をするための引き算

やってみよう[5]

1. -25を2の補数10桁で表現
2. -32を2の補数10桁で表現
3. 2の補数10000を10進数で表現
4. 2の補数1011000を10進数で表現

Question!

正の数と負の数の見分け方[1]

- 大前提: 数を表す2進数の桁数は決まっている
 - 普通のコンピュータで32桁(or 64桁)

ということは...例えば $(10)_{10}$ は、コンピュータ的には...

0000...00001010

とを考えている

28個の「0」

※授業のスライド中では32桁分も書けないので、そのときどきで適当なところで割愛

正の数と負の数の見分け方[2]

- 負の数(2の補数)の計算方法: 負の数Nを、正の数N(2進数)の0と1を反転させて1を加える

コンピュータ的には32桁で数を表すので...

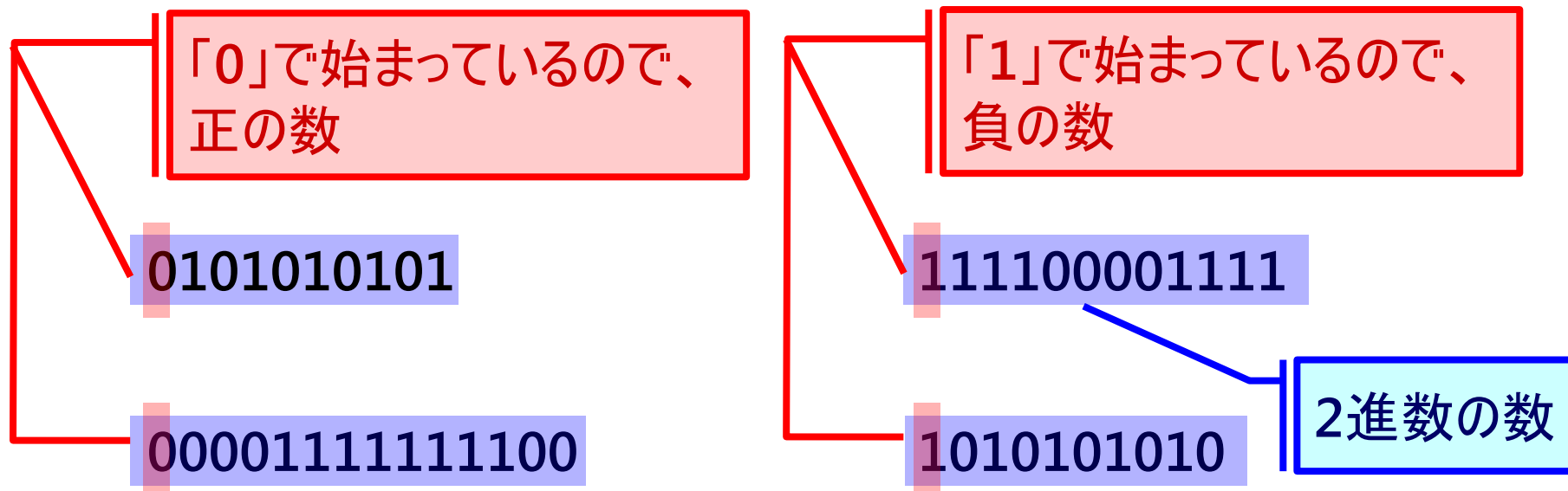
$$\begin{aligned} (-10)_{10} &\rightarrow (10)_{10} \\ &= (0000\dots00001010)_2 \\ &\rightarrow (1111\dots11110101 + 1)_2 = (1111\dots11110110)_2 \end{aligned}$$

28個の「0」も全て「1」に反転される

- ➡ 負の数は結果的に一番大きな桁(一番左の桁)が「1」になる
- ➡ 一番大きな桁(一番左の桁)が「0」であれば正の数、「1」であれば負の数として扱う

正の数と負の数の見分け方[3]

- 2進数を見たときに...(2の補数を考える場合)
 - 「2の補数を考える」という場合は、先頭の桁を見て、正の数か負の数かを判断
 - 「2の補数を考える」と書かれていない場合は、負の数を考えなくてOK



■ ■ ■ 正の数と負の数の見分け方[3]

- 2進数で表された数は、一番大きな桁(一番左の桁)が「0」であれば正の数、「1」であれば負の数
- 10進数で表された数は、普通に正の数、負の数として計算
 - 正の数であれば、割り算だけで2進数に変換
 - Ex. 「+5」または「5」と書かれていれば、割り算だけで2進数に変換
 - 負の数であれば、2の補数の方法で2進数に変換
 - Ex. 「-5」と書かれていれば、2の補数の方法で2進数に変換

桁あふれ(オーバーフロー)(p. 11)

- 2の補数に関係した桁あふれ(オーバーフロー)が起こりうる

Ex. 2進数5桁の計算(10進数で14+5の計算)

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ +) 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

1 0 0 1 1

↑ 先頭の桁が1になってしまった

➡ 先頭の桁が1の場合は、2進数で負の数として扱う

1 0 0 1 1

↑ 負の数を表す

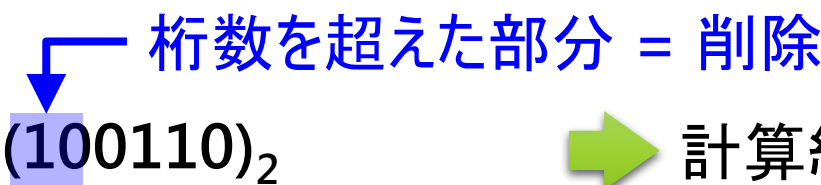
➡ 計算結果: $(-13)_{10}$ (負の数)

2の補数に関係した
桁あふれ(オーバーフロー)

負数込みの計算の考え方

- 計算結果を見て...(オーバーフローがどーのと考えるのではなく!)

1. 計算結果が指定の桁数を超えていれば、超えた分の桁を削除(桁数あわせ)

4桁の2進数の計算結果: $(100110)_2$  計算結果: $(0110)_2$

2. 計算結果の先頭の桁が0か1かで、正か負を判断

- 正の数(先頭の桁が0)であれば、割り算だけで10進数に直す
- 負の数(先頭の桁が1)であれば、2の補数の方法で10進数に直す

4桁の2進数の計算結果: $(0101)_2$  計算結果: $(5)_{10}$

4桁の2進数の計算結果: $(1010)_2$  計算結果: $(-6)_{10}$

桁あふれ[まとめ][1]

■ 桁あふれの分類(その1)

- 足し算等の何らかの計算の結果、コンピュータが扱うことのできる数の桁数の限界を超えてしまう場合
 - Ex. 4桁の数「0110+0110+0110」の計算
 - 本来の計算結果は「10010」で5桁になってしまうので、5桁目が無視されてコンピュータが出す結果は「0010」
 - コンピュータが出す結果と本来の結果が違うことになる現象

ある意味、コンピュータの性能の限界を超えてしまうということで、その結果として、本来の計算結果とは違う結果がでる現象

※人間やコンピュータがミスをした、という現象ではない

桁あふれ[まとめ][2]

■ 桁あふれの分類(その2)

■ 足し算等の何らかの計算の結果、数の正と負が違ってしまう場合

■ Ex. 4桁の数「0110+0110」の計算

- 本来の計算結果は「1100」で、1桁目が1なので、コンピュータは計算結果を負の数(-4)として取り扱い
- 本来の計算結果は正の数(12)
- コンピュータが出す結果と本来の結果が違うことになる現象

本来の計算結果は正(負)の数なのに、計算結果が
負(正)の数になってしまう現象

※人間やコンピュータがミスをした、という現象ではない

やってみよう[6]

1. $(+10) + (+8)$ を5桁の2の補数として計算し、10進数として表現
2. $(-10) + (+8)$ を5桁の2の補数として計算し、10進数として表現

オーバーフローも考慮すること

Question!

小数の表現方法

■ ■ ■ 整数以外の数を表現するには？

- コンピュータが表現できる数: 整数, 小数
- 整数以外の数

- 小数
- 分数
- n 乗根(平方根, 立方根, etc)
- π (円周率)
- etc.

全て小数として表現

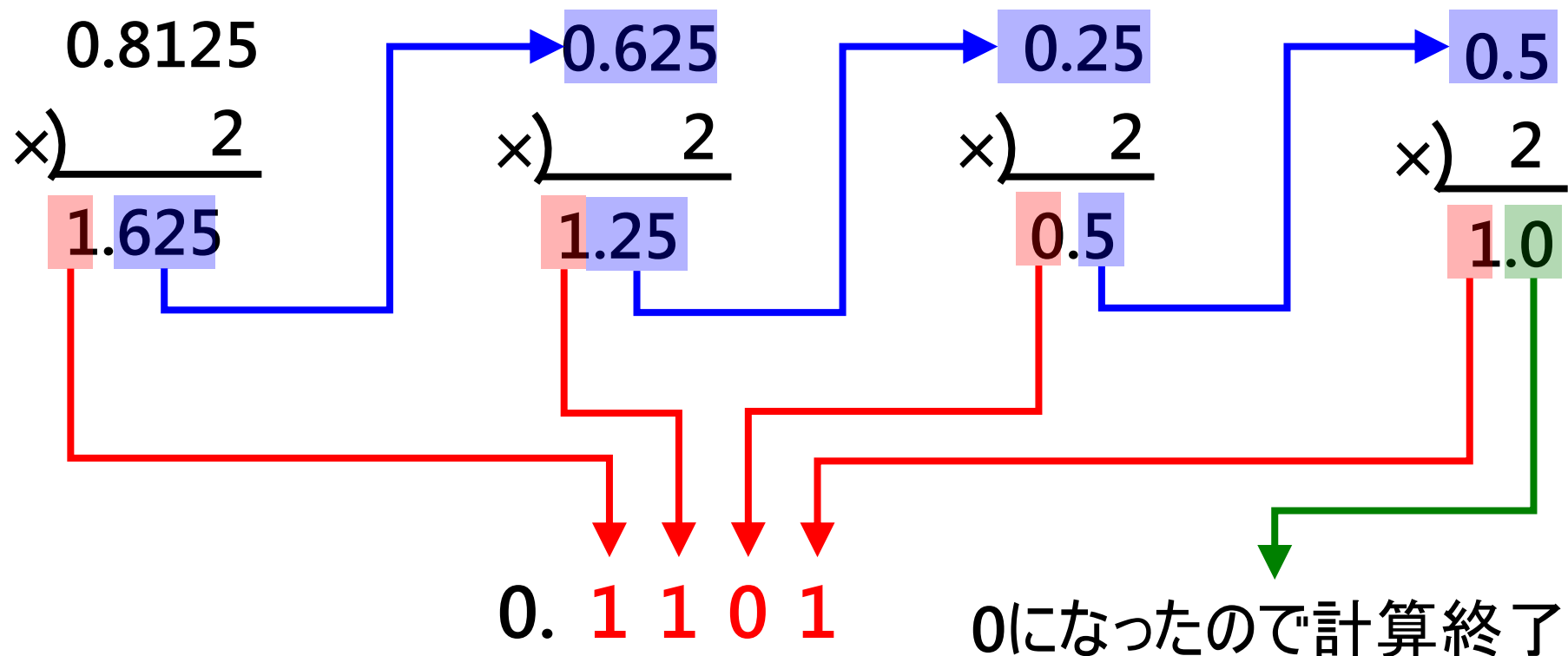
10進数の小数を2進数に直す[1]

1. 10進数の整数部分は、通常の方法で2進数に直す
2. 10進数の小数部分に2をかけ算する
3. 2. の結果、整数部分を小数点第1桁にする
4. 3. の結果、小数部分をまた10進数の数とする
 - 小数部分が0になるまで繰り返す
 - ✓ 無限小数になることも(10進数できりのいい数も2進数では無限小数になりえる)
 - 2. の整数部分を小数点第2桁、第3桁、...と置いていく
 - 1. の整数部分と2. の整数部分を並べたものが2進数での小数になる

10進数の小数を2進数に直す[2]

■ 10進数の小数を2進数に直すには?(例1)

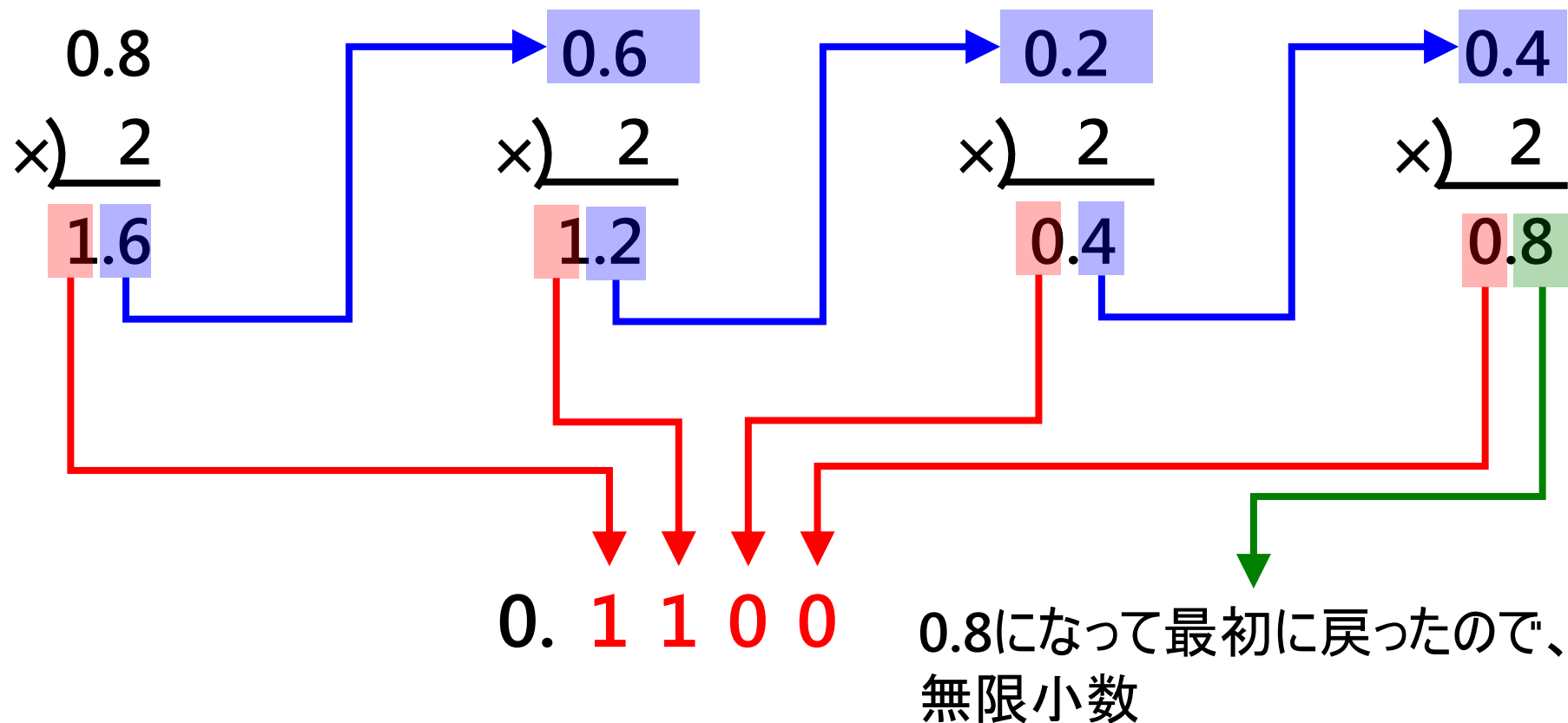
■ 10進数の0.8125を2進数に直す



$$(0.8125)_{10} = (0.1101)_2$$

10進数の小数を2進数に直す[3]

- 10進数の小数部分を2進数に直すには?(例2)
 - 10進数の3.8を2進数に直す(整数部分の3は2進数で11)



$$(3.8)_{10} = (11.110011001100\dots)_2$$

2進数の小数を10進数に直す[1]

■ 例: 101.1101 (整数部分101は10進数で5)

1. 2進数の整数部分は、通常の方法で10進数に直す
2. 10進数の小数部分各桁の上に「1/2」を書く
3. 2. で書いた「1/2」の「2」の右肩に左から1, 2, 3, ...と書いていく
 - $1/2^0, 1/2^1, 1/2^2, \dots$ ができていく

2.

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		2	2	2	2
0	.	1	1	0	1



3.

左から右に、1, 2, 3, ...と
番号をつける

		$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$
		2	2	2	2
0	.	1	1	0	1

2進数の小数を10進数に直す[2]

4. 各桁の上の「 $1/2^n$ 」と、それぞれの桁の数をかけあわせる
5. 4. の結果を足し合わせ、1. の整数部分とあわせる

3.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ 0 & . & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & . & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & \parallel & & \\ \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & 0 & \frac{1}{2^4} \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{2^1} \frac{1}{2^2} 0 \frac{1}{2^4}} \\ \text{足し合わせる} \\ \parallel \\ 0.5 + 0.25 + 0.0625 = \boxed{0.8125} \\ \text{1. の整数部分とあわせる} \\ \downarrow \\ 5.8125 \end{array}$$

■ やってみよう[7]

- 2進数1.101を10進数に変換
(2010年度ITパスポート春季試験問題)
 - 2進数に変換した時、有限小数で表現できる10進数は、
以下のうちどれか
 - 0.1
 - 0.2
 - 0.4
 - 0.5
- (2012年度ITパスポート秋季試験問題)

小数の表現方式

小数を表現する方法(p. 10)

- 固定小数点方式
- 浮動小数点方式

■ ■ ■ 固定小数点方式[1](p. 10)

- 小数部分の桁数が n の場合: 2進数では、小数部分が $1/2^n$ 刻みで表現



n を大きくすると、それだけ小数部分を細かく表現可能

※ただし、実際コンピュータは小数も2進数で考えているが、
人間が考えるときの便宜上、10進数で考えることが多い

■ ■ ■ 固定小数点方式[2](p. 10)

- 小数を表す桁数が決まっていると...

Ex. 右から2桁を小数部分とすると...

$$(2 \div 1000)_{10} = (0.002)_{10} \rightarrow (0.00)_{10}$$

小数を正確に表現できない

何桁分の小数部分を持っているかは数値によって異なる
= 固定小数点方式で小数を表せる場合は少ない



浮動小数点方式

■ ■ ■ 浮動小数点方式[1](p. 10)

- 小数: $D \times 10^n$ と表現できる

■ Ex. 1: $0.5 = 5 \times 10^{-1}$

■ Ex. 2: $-0.0625 = -6.25 \times 10^{-2}$

■ Ex. 3: $0.00000000084 = 8.4 \times 10^{-9}$

どの数でも「 $\times 10^n$ 」の「10」の部分は同じ(実際のコンピュータでは「 $\times 2^n$ 」)



小数を「 $D \times 10^n$ 」の形と考え、「D」と「n」だけ記憶しておく

■ 浮動小数点方式[2](p. 10)

- 浮動小数点方式:
小数を「 $D \times 10^n$ 」と考え、「 D 」と「 n 」を記憶することで小数を表す方式

Ex.

$D = 6.25, n = -3$ の場合: 0.00625

$D = 6.25, n = -2$ の場合: 0.0625

$D = 6.25, n = -1$ の場合: 0.625

$D = 6.25, n = 0$ の場合: 6.25

n の数値が何かで、小数点が仮数の中を動くように見えるから「浮動小数点」と名づけられた

D : 仮数部
 n : 指数部
と呼ぶ

■ ■ ■ 浮動小数点方式[3](p. 10)

■ 仮数部

- 符号は「0」が「+」、「1」が「-」
- 固定小数点方式

■ 指数部

- 符号は「0」が「+」、「1」が「-」(ただし、2の補数表現とは別の特殊な形で表現される)

大きな数の表現(p. 10)

■ 浮動小数点方式を利用して表現

Ex.

➤ $2000000000000 = 2 \times 10^{12}$

➤ $-4250000000000000000 = -4.25 \times 10^{17}$

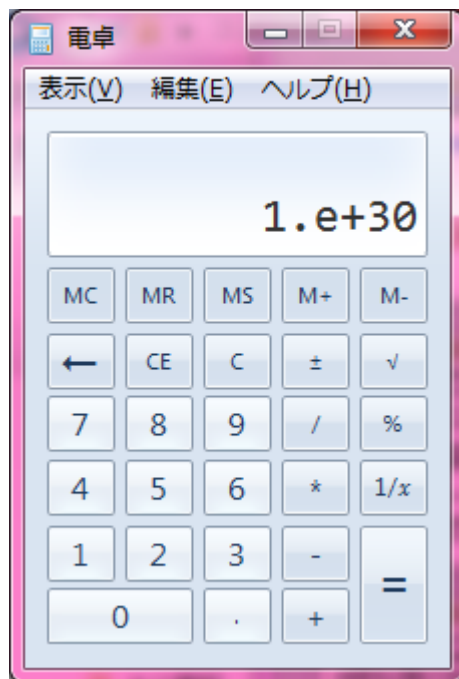
指数部が「+」の数になる



コンピュータは「2」と「+12」、「-4.25」と「+17」を記憶しておく
(実際には、「 $\times 10^n$ 」ではなく「 $\times 2^n$ 」で表現)

大きな数の表現[例](p. 10)

- Windowsの電卓のあるモード(オーバースローをなかなかしないモード)で...



$$\text{Ex. } 10000000000000000000 \times 10000000000000000000 \\ = 1.e+30$$

1.0×10^{30} という意味
(浮動小数点方式での表現)

※オーバースローしにくいモードは、大きな数を浮動小数点方式で表現する
= それだけたくさんの桁がある数を表現できるので、オーバースローしにくい

桁落ち(1)

- 小数部分が無限のものを扱えるわけではない
 - 例えば割り算で割り切れない数や円周率

➡ 小数部分を適当なところで切り捨てる(四捨五入ではない)

例えば... $1 \div 7$:

コンピュータは「0.142857...142」のように考える

本来はこの後も無限に続く

コンピュータが扱える小数の桁数:
「有効桁数」と呼ぶ

桁落ち(2)

- 小数部分が無限のものは適当なところまでで切り捨てられる

本来の数よりも、小数の桁数が小さくなってしまう現象

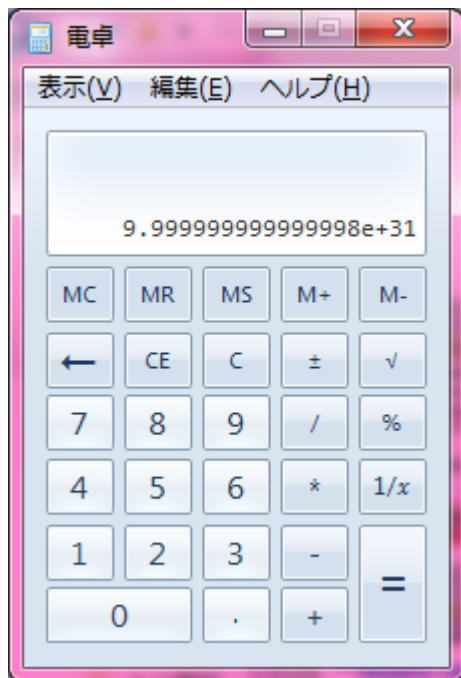


桁落ち

桁落ちの例

- Windowsの電卓のあるモード(オーバーフローをなかなかしないモード)で...

Ex. 電卓での計算: $999999999999999999 \times 999999999999999999$
→ $9.9999999999999998e+31 = 9.9999999999999998 \times 10^{31}$
= $9999999999999999980000...000$ **00**



でも実際に計算すると...

$$\begin{array}{r} 999999999999999999 \\ \times) 999999999999999999 \\ \hline \dots 91 \\ +) \dots 91 \\ \hline \dots 01 \end{array}$$

つまり本当の計算では...

$$\begin{aligned} &999999999999999999 \times 999999999999999999 \\ &= x.xxxx... \mathbf{01} \end{aligned}$$

桁落ち

ミニ実習

- スマートフォンの電卓で、大きな数のかけ算をしてみよう!
 - 結果が浮動小数点表示になるか?
 - 桁落ちしているか?
- を確認しよう!

桁落ちが起こると...

- 数が本来の数よりも小さくなってしまう
 - 微妙な数値が必要な場合には要注意
- 桁落ちをした数に大きな数をかけると、本来の数に大きな数をかけたときとの差が大きくなる

例えば...有効桁数が小数点第3位とすると、 $1 \div 7 \times 100000$ の計算は...

- コンピュータ: 「 $1 \div 7$ 」をして0.142に桁落ちし、それに100000をかけて、14200
- コンピュータ: 1×100000 を7で割ると(計算の順序を変えると)、14285.714
- 人間: 本来の $1 \div 7$ に100000をかけると、14285.714285....

- 
- コンピュータで計算をするときは、計算の順番に注意
(割り算はなるべく後に行うこと)
 - 例えば「 $1 \div 7 \times 100000$ 」の計算は、「 1×100000 」をしてから7で割る

やってみよう[8]

1. 0.0000055を浮動小数点方式で表現
2. 0.0000000001234を浮動小数点方式で表現
3. 45600000000000000を浮動小数点方式で表現
※3つとも仮数部は小数点第2位の小数とすること
4. $(10 \div 7) \times 10000$ を計算
 - 小数点第2位までが有効桁数
 - 桁落ちを考えて計算すること
5. $10 \div 7 \times 10000$ を計算
 - 小数点第2位までが有効桁数
 - 桁落ちの影響がなるべく少ないように計算すること

Question!