関孝和の円周率の計算

長田直樹

東京女子大学

研究の目的

- 関孝和は、直径 1 の円に内接する正 $2^{15}, 2^{16}, 2^{17}$ 角形の周の長さ s_{15}, s_{16}, s_{17} から

$$t_{15} = s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})}$$

を計算し円周率を求めた。
- 関は正 $2^2, \ldots, 2^{17}$ 角形の勾股弦周の値を小数点以下 19 桁表示し、t_{15} の値を 17 桁正しく計算し、定周を 12 桁求めた。
- 『括要算法』巻貞 (四巻) を忠実にたどることにより、関の計算を再現する。
- いくつかの未解明な問題を解決し、解釈の分かれる問題に新たな仮説を提起する。

解決する問題

3 点を明らかにする。

- 関の方法では理論的に何桁の円周率を得ることができるか。
- 関はどのような方式で何桁の計算を行ったか。
- 関は何故 17 桁しか正しい値が得られなかったか。

提起する仮説

4 つの仮説を提起する。

- 関は勾股弦周をいかに求めたか。
- 関は定周をいかなる意味で用いたか。
- 関は 17 桁の円周率を得たにもかかわらず、何故 12 桁を定周としたか。
- 関はどのような理由で計算桁数を決めたか。

Aitken Δ^2 法

$\{s_\nu\}$：数列

- 差分：$\Delta s_\nu = s_{\nu+1} - s_\nu$
  2 階差分：$\Delta^2 s_\nu = \Delta s_{\nu+1} - \Delta s_\nu$
- 数列変換：$\{s_\nu\} \mapsto \{t_\nu\}$

$$\begin{aligned} t_\nu &= s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu)(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1} - s_\nu) - (s_{\nu+2} - s_{\nu+1})} \\ &= s_\nu - \frac{(\Delta s_\nu)^2}{\Delta^2 s_\nu} \end{aligned}$$

を Aitken Δ^2 法という。

Aitken Δ^2 法の基本定理

定理 (P. Wynn, J.W. Schmidt) **数列** $\{s_\nu\}$ **が** $\nu \to \infty$ **のとき次の漸近表示を持つ。**

$$s_\nu = s + c_1\lambda_1^\nu + c_2\lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu)$$

s **：未知の極限値、** $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ **：未知の定数で**
$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$
$\Longrightarrow$

$$t_\nu = s + c_2\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - 1}\right)^2 \lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu)$$

関の理論上の誤差

- s_ν：直径 1 の円に内接する正 2^ν 角形の周長
- $\sin x$ の Taylor 展開より

$$s_\nu = 2^\nu \sin\frac{\pi}{2^\nu} = \pi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \pi^{2j+1}}{(2j+1)!}(2^{-2j})^\nu$$

- 定理において $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 1/16, c_2 = \pi^5/5!$ とおくと

$$t_\nu \sim \pi + \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{16}\right)^{\nu+1}$$

が導ける。

(続く)

関の理論上の誤差(続き)

- 関の結果の理論上の誤差は $\nu = 15$ と置くと得られる。

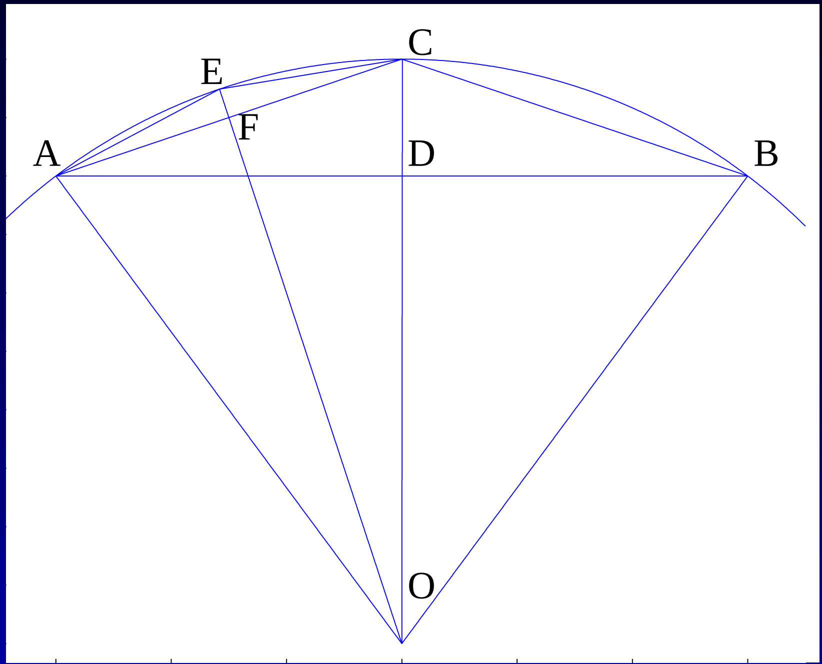
$$\frac{\pi^5}{5!}16^{-16} \fallingdotseq 1.382 \times 10^{-19}$$

- t_{15} をコンピュータで 50 桁計算した結果が森本『UBASIC による解析入門』などにある。

3.14159 26535 89793 2386*0 08880 52942 97530 83469 32994 30302*

誤差は 1.3824×10^{-19} となり、理論上の誤差に一致している。

勾股弦周の算法



直径 1 の円に内接する正 2^ν 角形の勾、股、弦、周、

$$\text{勾}_\nu = \mathrm{EF},\ \text{股}_\nu = \mathrm{AF},\ \text{弦}_\nu = \mathrm{AE},\ \text{周}_\nu = 2^\nu \text{弦}_\nu$$

(続く)

勾股弦周の算法(続き)

- 関は「各以二勾股術一、求レ弦。以二角数一相二乗之一、各得二截周一。各所得勾股弦及周数列于後」に続き、四角から十三万一千零七十二角までの勾股弦周を与えている。
- 「始關氏角面冪ヲ開平方ニシテ各角面ヲ求テ截周ヲ用ユ」建部賢弘『綴術算経』
- 関の勾股弦周の算法(仮説)

$$\text{勾}_\nu = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\text{弦}^2_{\nu-1}}\right), \quad \text{股}_\nu = \frac{1}{2}\text{弦}_{\nu-1},$$

$$\text{弦}_\nu = \sqrt{\text{勾}^2_\nu + \text{股}^2_\nu}, \quad \text{周}_\nu = 2^\nu \text{弦}_\nu$$

- $\text{弦}^2_{\nu-1} (= \text{勾}^2_{\nu-1} + \text{股}^2_{\nu-1})$ は計算済み

関の計算の観察

一十三万一千零七十二角 (正 2^{17} 角形) のデータ

	関の表現
勾	五塵七四四八六五八六二強
股	二絲三九六八四四九八〇一五三三四強
弦	二絲三九六八四四九八〇八四一八二強
周	三尺一四一五九二六五三二八八九九二七七五九弱

	一尺を 1 とする固定小数点表示
勾	$0.00000\ 00005\ 74486\ 5862$ 強
股	$0.00002\ 39684\ 49801\ 5334$ 強
弦	$0.00002\ 39684\ 49808\ 4182$ 強
周	$3.14159\ 26532\ 88992\ 7759$ 弱

関の計算方式

- 周を 17 桁正確に求めているので弦 $(=\text{周}/131072)$、勾と股も 17 桁前後正確に求めた筈である。
- 勾の有効数字は 10 桁なので、7 桁程度余分に計算している。
- 一尺を 1 とする固定小数点に翻訳すると、整数部 1 桁小数部 26 桁前後 (後ほど確定させる) で計算し、小数第 20 位を丸めている。

真値との一致桁数

- 真値が 3.14159 で近似値が 3.12345 のとき、2 桁真値と一致している。
- 小数第 2 位以降の近似度も反映させる。
- 真値 x の近似値 a のとき、a が x と一致する桁数は $-\log_{10}|a-x|/|x|$ で定義する。
- $-\log_{10}|(3.12345-3.14159)/3.14159| \fallingdotseq 2.2385$

周の有効桁数

- $u_\nu =$ 勾$_\nu$, $s_\nu =$ 周$_\nu$
- $u_\nu = a \times 10^{-e} = 10^{-f}, \quad 1 \leqq a < 10,\ e \in \mathbb{N}$ を仮定
- $s_\nu = 2^\nu \sqrt{u_\nu} = 10^{\nu \log_{10} 2 - f/2}$
- $s_\nu \risingdotseq \pi \risingdotseq 10^{0.497}$ より、$f \risingdotseq 0.602\nu - 0.994$
- 小数点以下 d 桁 $(d > e)$ の固定小数点計算を行った際の u_ν, s_ν の計算値を $\bar{u}_\nu, \bar{s}_\nu$ とおく。
- u_ν は小数点以下に 0 が $e - 1 = \lfloor f \rfloor$ 個続くので、$\bar{u}_\nu$ は $e - 1 = \lfloor f \rfloor$ 桁の情報落ちが生じ、有効桁数は最大で $d - \lfloor f \rfloor$ 桁である。
- $\bar{s}_\nu$ の計算には $\bar{u}_\nu$ を用いるので、$\bar{s}_\nu$ の有効桁数も、$d - \lfloor f \rfloor$ に近い。

関の計算桁数

- 関の値は 20 桁しか分からないので、$\nu = 14, 15, 16, 17$ のみを比較する。
- 関が小数第 16 位から第 19 位までを 708 弱と表示している s_{15} は、小数第 16 位から第 21 位まで表すと $70750 \sim 70789$ であるので、中央値 7077 を関の値とする。同様に s_{16} の 571 強は 5713、s_{17} の 759 弱は 7587 を関の値として差を出した。

(続く)

関の計算桁数(続き)

- 理論上の有効桁数と関の一致桁数 $(d = 26)$

ν	$f = 0.602\nu - 0.994$	$26 - \lfloor f \rfloor$	関
14	7.434	19	18.26
15	8.036	18	18.39
16	8.639	18	17.44
17	9.240	17	17.47

- $d = 26$ の場合が最も関の一致桁数に近い。

関の計算の再現

- MATLAB with extended symbolic MathToolbox により、関の計算を再現する。
- 直径 10^{26} の円に内接する正 2^ν 角形の勾、股、弦、周を $U_\nu, V_\nu, W_\nu, S_\nu$ とし、$X_\nu = \text{勾}_\nu^2 + \text{股}_\nu^2$
- $U_\nu = \lfloor \left(10^{26} - \lfloor \sqrt{10^{26}(10^{26} - X_{\nu-1})} \rfloor \right) /2 \rfloor$
- $V_\nu = \lfloor \frac{1}{2} W_{\nu-1} \rfloor$
- $X_\nu = \lfloor \frac{U_\nu^2}{10^{26}} \rfloor + \lfloor \frac{V_\nu^2}{10^{26}} \rfloor$
- $W_\nu = \lfloor \sqrt{10^{26} X_\nu} \rfloor$
- $S_\nu = 2^\nu W_\nu$

再現結果

ν	上段 再現値 $S_\nu/10^{26}$: 中段 関の値 下段 真値 $s_\nu = 2^\nu \sin(\pi/2^\nu)$
15	3.14159 26487 76985 6<u>6567</u>
	3.14159 26487 76985 6708 弱
	3.14159 26487 76985 6<u>6949</u>
16	3.14159 26523 86591 3<u>2979</u>
	3.14159 26523 86591 3571 強
	3.14159 26523 86591 3<u>4580</u>
17	3.14159 26532 88992 7<u>2124</u>
	3.14159 26532 88992 7759 弱
	3.14159 26532 88992 7<u>6527</u>

下線部分は関の計算値と異なる数字

定周の意味(仮説)

- 『括要算法』巻貞の冒頭

  求円周率術

  仮如、有二円満径一尺一、
  則問二円周率若干一。
  答曰、径一百一十三ナレハ
  　　　周三百五十五ナリ。
  依二環矩ノ術一、得二径一之定周一、而以二
  零約術一、得二径一百一十三、周三百五
  十五一、合レ問。

- 定周とは零約術を用いる際の基準となる円周率のことである。

(続く)

定周の意味(仮説)(続き)

- 建部賢弘は『綴術算経』において「始闕氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ル事ヲ理会シテ一遍ニシテ止ム故二十三万千七十二角ニ至ル截周ヲ以テ十五六位ノ真数ヲ究メ得タリ」「砕約ノ術ヲ用テ径一尺ノ定周三尺一寸四一五 (後略) 七一二強ヲ求メ得テ零約ノ術ヲ以テ径周ノ率ヲ造ル」
- 建部賢弘の定周も関と同じ意味で用いている。
- 関が定周を 12 桁求めたのは、零約術により $355/113 \fallingdotseq 3.1415929\mathbf{2}$ 程度の周径率を求める為なら 12 桁で十分であるから。
- 『括要算法』巻貞は円周率と周径率を可能な限り詳しく求めるという趣旨ではない。

関が26桁で計算した理由(仮説)

- 関は勾の計算で有効数字の桁数が9桁少なくなるのを見て、9桁前後の情報落ちに気がついた可能性が高い。
- 関が必要としていた円周率は13桁程度であったので、26桁で計算すれば17桁程度の値が得られると考え26桁を採用した。
- 関は17桁正しい値を得たと考え12桁を定周にしたということになる。

結論

- 関の方法では理論的に何桁の円周率を得ることができるか。
  19 桁の円周率を得ることができる。
- 関はどのような方式で何桁の計算を行ったと考えられるか。
  整数部分 1 桁小数部分 26 桁の 10 進固定小数点数により計算を行った。
- 関は何故 17 桁しか正しい値が得られなかったか。
  内接 2^{17} 角形の勾の値が 5.7×10^{-10} なので、9 桁の情報落ちが生じたことによる。

提示した仮説

- 関は勾股弦周をいかに求めたか。

$$勾_\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 弦_{\nu-1}^2}\right), \quad 股_\nu = \frac{1}{2}弦_{\nu-1},$$

$$弦_\nu = \sqrt{勾_\nu^2 + 股_\nu^2}, \quad 周_\nu = 2^\nu 弦_\nu$$

- 関は定周をいかなる意味で用いたか。
  周径率を求める際に基準となる円周率。
- 定周は何故 12 桁か。
  周径率 $355/113$ を導くためには、定周は 12 桁で十分であった。
- 何故小数点以下 26 桁の計算を行ったか。
  定周を正確に 12 桁求めるため。

Aitken Δ^2 法の導出 (増約術説)

関が Aitken Δ^2 法をいかに導出したかについては諸説ある。いずれの説も無限等比級数の和の公式 (増約術) に基づく説明である。

- 関が『括要算法』巻亨 (二巻) で増約術を扱っている。
- 建部賢弘が『綴術算経』において「始關氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ル事ヲ理会シテ一遍ニシテ止ム」と述べている。
- 松永良弼が『起源解』で増約術による説明を行った。

Aitken $\triangle^2$ 法の導出 (仮説)

- 関は増約術で定周を求めるとは書いてない。
- 建部兄弟や荒木村英は関から $\triangle^2$ 法の導出については聞いていない。増約術によるとの考えは、関の門人達の解釈に過ぎない。
  小川、関孝和の数学をめぐる謎、数学文化、10(2008), pp.95-99
- 増約術に基づかない (大胆な) 仮説を提起する。
- 関は、村松茂清の『算俎』などから 3.1415926(s_{14}, s_{15} の一致する部分) までは正しいと確信していた。
- 関は角数の少ないところを観察し、差分の比と誤差 (円周率には 3.1415926 を代用) の比が同じ値に近づいていくことを知った。

(続く)

Aitken $\triangle^2$ 法の導出(仮説)(続き)

ν	差分の比 $\dfrac{s_{\nu+2}-s_{\nu+1}}{s_{\nu+1}-s_\nu}$	誤差の比 $\dfrac{s_{\nu+1}-s}{s_\nu-s}$ $s=3.1415926$
2	0.25737044	0.25585560
3	0.25181592	0.25144976
4	0.25045234	0.25035972
5	0.25011298	0.25008241
6	0.25002824	0.24999073
7	0.25000706	0.24987819
8	0.25000176	0.24949135

(続く)

Aitken $\triangle^2$ 法の導出 (仮説)(続き)

- 未知の円周率を s は次の式を満たすと仮定。

$$\frac{s_{\nu+2}-s_{\nu+1}}{s_{\nu+1}-s_{\nu}}=\frac{s_{\nu+1}-s}{s_{\nu}-s}$$

- $[(s_{\nu+1}-s_{\nu})-(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})]s = -(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})s_{\nu}+(s_{\nu+1}-s_{\nu})s_{\nu+1}$
- s について解いて

$$\begin{aligned} s &= \frac{-(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})s_{\nu}+(s_{\nu+1}-s_{\nu})s_{\nu+1}}{(s_{\nu+1}-s_{\nu})-(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})} \\ &= s_{\nu+1}+\frac{(s_{\nu+1}-s_{\nu})(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1}-s_{\nu})-(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})} \end{aligned}$$