# 関孝和の円周率の計算

東京女子大学　長田直樹 (Naoki Osada)
Tokyo Woman's Christian University

**概要**

関孝和が『括要算法』巻貞において円周率の計算をいかに行ったか、関および建部賢明・賢弘が「定周」をいかなる意味で用いたかを明らかにする。さらに、『括要算法』と『大成算経』の関係について試論を述べる。

## 1　はじめに

関孝和は、直径 1 の円に内接する正 $2^{15}, 2^{16}, 2^{17}$ 角形の周の長さ $s_{15}, s_{16}, s_{17}$ から

$$t_{15} = s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})} \tag{1}$$

を計算し定周を定めた。(1) は関の後継者達からは「増約術」と呼ばれ、今日では Aitken $\Delta^2$ 法と呼ばれている収束の加速法である。関は正 $2^2, \ldots, 2^{17}$ 角形の勾股弦周の値を小数点以下 19 桁表示し、$t_{15}$ の値を 17 桁正しく計算し、定周を 12 桁求めた。

本報告では『括要算法』巻貞を忠実にたどることにより、関の計算を再現する。関の計算を再現する過程で、次の 3 点を明らかにする。

1. 関の方法 (1) では理論的に何桁の円周率を得ることができるか。
2. 関はどのような方式で何桁の計算を行ったか。
3. 関は何故 17 桁しか正しい値を得られなかったか。

また、関は 17 桁正しい値を得たにもかかわらず「定周」は何故 12 桁だったのか、を考察することにより、関及び建部賢明・賢弘兄弟が「定周」をいかなる意味で用いたかを明らかにする。さらに、関及び建部兄弟の円周率についての研究を比較することにより、『括要算法』と『大成算経』の関係について試論を述べる

Aitken $\Delta^2$ 法をいかに導びいたかについて、関は何も残しておらず未解決問題になっている。これについての仮説は付録に与える。

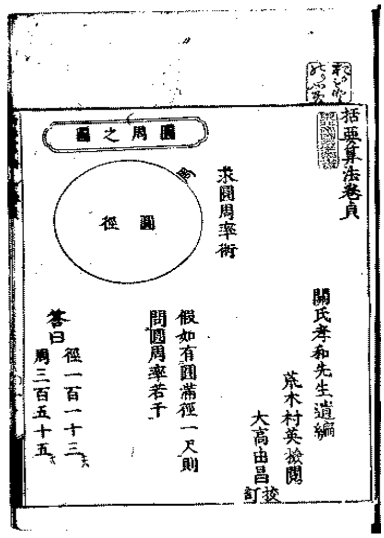
## 2　関の計算

### 2.1　計算の概要

『括要算法』巻貞の冒頭 (図 1, 図 2 の 1 丁裏) に「円周率術ヲ求ム　モシ円満径一尺有リ、則チ円周率若干ヲ問フ。答曰、径一百一十三ナレハ、周三百五十五ナリ。環矩ノ術ニ依リテ、径一ノ定周ヲ得、零約術ヲ以テ、径一百一十三、周三百五十五ヲ得、問ニ合フ。」と要約されているように、「求円周率術」において関は円周率の近似分数 355/113 を次の 3 つのステップにより導いた。

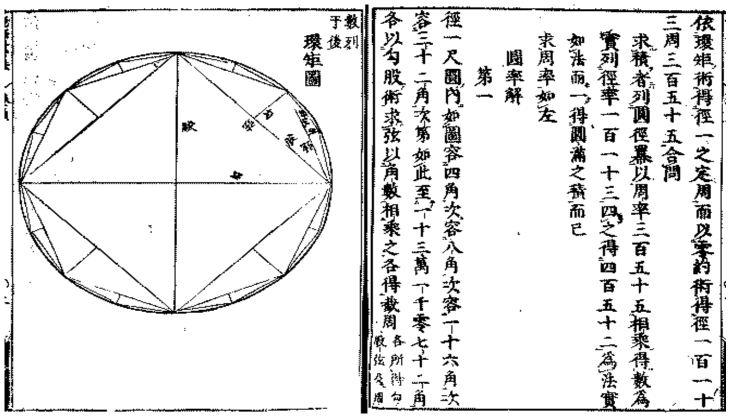
1. 直径 1(尺) の円に内接する正 $2^2, \ldots, 2^{17}$ 角形の勾股弦周を「環矩術」により得る。
2. 正 $2^{15}, 2^{16}, 2^{17}$ 角形の周長から (1) を計算し、「定周」3.14159265359 微弱を得る。
3. 2 の「定周」を用いて「零約術」により「周径率」355/113 を得る。

1 は村松茂清ら関以前の和算家などと類似の方法を用いたと思われるが、2 と 3 は関の独創によるものである。特に 2 は現代の数値解析の視点から見ても画期的業績 [2, 3, 10] である。まず、2 の考察から始める。



括要算法巻貞
關氏孝和先生遺編
荒木村英撿閲
大高由昌訂挍
圓周之圖
求圓周率術
周
圓 徑
假如有圓滿徑一尺則
問圓周率若干
答曰 徑一百一十三
周三百五十五

図 1 『括要算法』(東北大学・岡本刊 089) 巻貞 1 丁表



依環矩術得徑一之定周而以零約術得徑一百一十
三周三百五十五合問
求積者列圓徑冪以周率三百五十五相乘得數爲
實列徑率一百一十三四之得四百五十二爲法實
如法而一得圓滿之積而已
求周率如左
圓率解
第一
徑一尺圓内如圖容四角次容八角次容一十六角次
容三十二角次第如此至一十三萬一千零七十二角
各以勾股術求弦以角數相乘之各得截周

數列于後
環矩圖

図 2 『括要算法』(東北大学・岡本刊 089) 巻貞 1 丁裏 (右)、2 丁表 (左)

## 2.2 Aitken $\Delta^2$ 法

数列 $\{s_\nu\}$ の差分を $\Delta s_\nu = s_{\nu+1} - s_\nu$ により、2 階差分を $\Delta^2 s_\nu = \Delta s_{\nu+1} - \Delta s_\nu$ により定義する。

数列 $\{s_\nu\}$ を

$$t_\nu = s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu)(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1} - s_\nu) - (s_{\nu+2} - s_{\nu+1})} = s_\nu - \frac{(\Delta s_\nu)^2}{\Delta^2 s_\nu}$$

により定義される数列 $\{t_\nu\}$ へ変換する方法を Aitken $\Delta^2$ 法 ($\Delta^2$ 法と略す) あるいは Aitken 加速法という。名称は統計学者の A.C. Aitken[1] が、1926 年に代数方程式の最大根を求める過程で使ったことに由来する。

$\Delta^2$ 法による加速については次の定理が基本的である。

**定理 1** (P. Wynn, J.W. Schmidt) 数列 $\{s_\nu\}$ が $\nu \to \infty$ のとき

$$s_\nu = s + c_1 \lambda_1^\nu + c_2 \lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu) \tag{2}$$

と漸近表示されるものとする。ここで、$s$ は未知の極限値、$c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ は未知の定数で $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$

である。このとき、

$$t_\nu = s + c_2\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-1}\right)^2\lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu) \tag{3}$$

を満たす。(証明は [11] を見よ。)

直径 1 の円に内接する正 $2^\nu$ 角形の周長を $s_\nu$ とすると

$$s_\nu = 2^\nu \sin\frac{\pi}{2^\nu} = \pi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}(2^{-2j})^\nu$$

である。定理 1 において $s=\pi, \lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 1/16, c_1 = -\pi^3/3!, c_2 = \pi^5/5!$ とおくと

$$t_\nu \sim \pi + \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{16}\right)^{\nu+1}$$

が導ける。関の結果の理論上の誤差は $\nu = 15$ より、

$$\frac{\pi^5}{5!}16^{-16} \fallingdotseq 1.382\times10^{-19}$$

である。

コンピュータで 50 桁計算した結果が [8, p.65] にある。

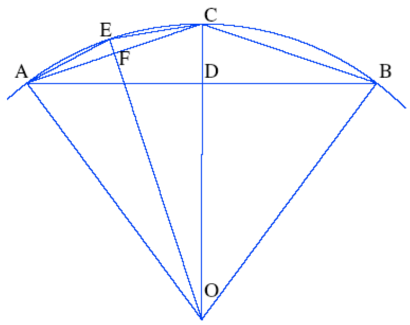
3.14159 26535 89793 238*60 08880 52942 97530 83469 32994 30302*

誤差は $1.3824\times10^{-19}$ となり、理論上の誤差に一致している。

関がいかにして Aitken $\Delta^2$ 法を導いたかについて、関は何も残していない。関の後継者達は (1) を「増約術」と呼んでいるが、「増約術」を関は無限等比級数の和の意味 (『括要算法』巻亨) としてしか用いていない。関の導出についての仮説を付録に与える。

### 2.3 勾股弦周の計算方法

関は図 2 にあるように、「環矩術」により、円に内接する四角から一十三万一千零七十二角までの勾股弦周を「勾股術」(三平方の定理) を繰り返し用いて計算している。関は詳細を書いてないので、関の計算を再現するために確認しておく。




右図において A、B、C、E は、O を中心、直径 1 の円周上の点とし、弦 AB、AC、AE はそれぞれ円 O に内接する正 $2^{\nu-2}, 2^{\nu-1}, 2^\nu$ 角形の 1 辺とする。円 O に内接する正 $2^{\nu-1}$ 角形と正 $2^\nu$ 角形の勾股弦周はそれぞれ下付きの添字で表し、

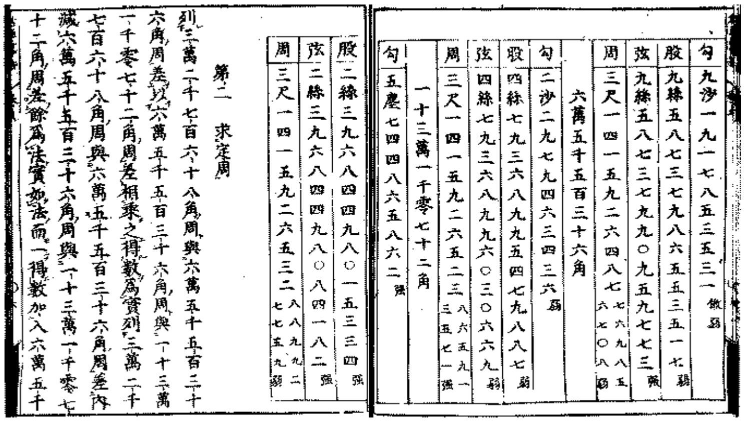
$$\text{勾}_{\nu-1} = \mathrm{CD},\ \text{股}_{\nu-1} = \mathrm{AD},\ \text{弦}_{\nu-1} = \mathrm{AC},\ \text{周}_{\nu-1} = 2^{\nu-1}\text{弦}_{\nu-1},$$
$$\text{勾}_\nu = \mathrm{EF},\ \text{股}_\nu = \mathrm{AF},\ \text{弦}_\nu = \mathrm{AE},\ \text{周}_\nu = 2^\nu\text{弦}_\nu$$

により定義する。(線分や曲線とそれらの長さは同じ記号で扱う。)

図 2 の 1 丁裏最後の 3 行の記述、勾股弦周の順に値を与えていること (図 3 参照)、および関の高弟の建部賢弘が「始関氏角面冪ヲ開平方ニシテ各角面ヲ求テ截周ヲ用ユ」『綴術算経』と記していることなどから、関は

$$\text{勾}_\nu = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\text{弦}_{\nu-1}^2}\right),\quad \text{股}_\nu = \frac{1}{2}\text{弦}_{\nu-1},\quad \text{弦}_\nu = \sqrt{\text{勾}_\nu^2+\text{股}_\nu^2},\quad \text{周}_\nu = 2^\nu\text{弦}_\nu$$

により計算したものと思われる。なお、$\text{弦}_{\nu-1}^2 (= \text{勾}_{\nu-1}^2 + \text{股}_{\nu-1}^2)$ は正 $2^{\nu-1}$ 角形において計算済みであるので、各 $\nu$ において加減算 3 回、乗算 3 回、冪 2 回、開平 2 回の計算が必要である。


勾 九渺一九一七八五三五三一微弱
股 九絲五八七三七九八六五五三五一七弱
弦 九絲五八七三七九九〇九五九七七三強
周 三尺一四一五九二六四八七七六九八五六七〇八弱
六萬五千五百三十六角
勾 二渺二九七九四六三四三六弱
股 四絲七九三六八九九五四七九八八七弱
弦 四絲七九三六八九九六〇三〇六六九弱
周 三尺一四一五九二六五二三八六五九一三五七一強
一十三萬一千零七十二角
勾 五塵七四四八六五八六二強
股 二絲三九六八四四九八〇一五三三四強
弦 二絲三九六八四四九八〇八四一八二強
周 三尺一四一五九二六五三二八八九九二七七五九弱

第二　求定周
列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十
六角周差以六萬五千五百三十六角周與一十三萬
一千零七十二角周差相乘之得數爲實列三萬二千
七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差內
減六萬五千五百三十六角周與一十三萬一千零七
十二角周差餘爲法實如法而一得數加入六萬五千

図 3　『括要算法』(東北大学・岡本刊 089) 巻貞 5 丁裏 6 丁表

## 2.4 計算方式

関の計算結果は図 3 のようになっている。規則性が見て取れるように、$\nu = 17$(内接正 131072 角形) の場合を表 1 に整理する。

表 1　関の計算結果

| | 関の表現 (図 3) | 固定小数点表示 |
|---|---|---|
| 勾 | 五塵七四四八六五八六二強 | 0.00000 00005 74486 5862 強 |
| 股 | 二絲三九六八四四九八〇一五三三四強 | 0.00002 39684 49801 5334 強 |
| 弦 | 二絲三九六八四四九八〇八四一八二強 | 0.00002 39684 49808 4182 強 |
| 周 | 三尺一四一五九二六五三二八八九九二七七五九弱 | 3.14159 26532 88992 7759 弱 |

関の表現を一尺を 1 とする固定小数点で表すと、小数第 20 位を (四捨五入、特に 0 のときは微強、9 のときは微弱と) 丸めて第 19 位まで表していることが分かる。関は周を 17 桁正確に求めているので弦 (= 周/131072)、勾と股も 17 桁前後正確に求めた筈である。勾の有効数字は 10 桁なので、7 桁程度余分に計算し小数点以下 26 桁辺りまで計算したと考えられる。「辺り」は以下の節で確定させる。

## 2.5 周の一致桁数

直径 1 の円に内接する正 $2^\nu$ 角形の周 $s_\nu$ を小数点以下 $d$ 位まで (小数第 $d+1$ 位以下を切り捨て) 計算し、得られた値を $\bar{s}_\nu$ とする。$\bar{s}_\nu$ の $s_\nu$ との一致桁数と、関が計算した周と $s_\nu$ の一致桁数を比較することにより、関が小数点以下何桁の計算をしたかを調べる。

### 2.5.1 真値との一致桁数

一致桁数の定義を与えておく。真値が 3.14159 で近似値が 3.12345 のとき 2 桁一致しているというのが素朴な数え方であるが、これを精密にすると

$$-\log_{10}\left|\frac{\text{近似値} - \text{真値}}{\text{真値}}\right| \tag{4}$$

となる。上記の例であれば、$-\log_{10}|(3.12345-3.14159)/3.14159| \fallingdotseq 2.2385$ 桁である。(4) を真値との一致桁数と呼ぶ。

### 2.5.2 関の計算結果の有効桁数

直径 1 の円に内接する正 $2^\nu$ 角形の勾を $u_\nu$ とする。

$$u_\nu = a \times 10^{-e} = 10^{-f}, \quad 1 \leqq a < 10,\ e \in \mathbb{N} \tag{5}$$

とおくと、$弦_\nu = \sqrt{勾_\nu}$ より、

$$s_\nu = 2^\nu \sqrt{u_\nu} = 10^{\nu \log_{10} 2 - f/2}$$

である。$s_\nu \fallingdotseq \pi \fallingdotseq 10^{0.497}$ より、$0.497 \fallingdotseq 0.301\nu - 0.5f$ から $f \fallingdotseq 0.602\nu - 0.994$ が成り立つ。

$u_\nu$ は小数点以下に 0 が $e-1=\lfloor f \rfloor$ 個続くので、小数点以下 $d$ 桁まで (小数第 $d+1$ 位以下を切り捨てにより) 計算するときは $e-1=\lfloor f \rfloor$ 桁の情報落ちが生じる。(記号 $\lfloor f \rfloor$ は $f$ を超えない最大の整数を表す。) $u_\nu$ の計算値 $\bar{u}_\nu$ の有効数字の桁数は (最大で)$d-\lfloor f \rfloor$ である。$s_\nu$ は勾と股を用いて計算するので有効数字の桁数は $d-\lfloor f \rfloor$ に近い。つまり $d-\lfloor f \rfloor$ は理論上の一致桁数の近似値である。表 2 に $d=25,26,27$ のときの理論上の一致桁数と関の計算結果の一致桁数を与える。$\nu=14,15,16,17$ のとき関の一致桁数との差の絶対値がすべて 1 以内であるのは、$d=26$ のときのみである。したがって、関は小数第 26 位まで (小数第 27 位以下を切り捨てにより) 計算したと判断できる。

表 2　理論上の一致桁数 ($d=25,26,27$) と関の一致桁数

| $\nu$ | $f=0.602\nu-0.994$ | $25-\lfloor f \rfloor$ | $26-\lfloor f \rfloor$ | $27-\lfloor f \rfloor$ | 関の一致桁数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 7.434 | 18 | 19 | 20 | 18.26 |
| 15 | 8.036 | 17 | 18 | 19 | 18.39 |
| 16 | 8.639 | 17 | 18 | 19 | 17.44 |
| 17 | 9.240 | 16 | 17 | 18 | 17.47 |

## 2.6 計算の再現

小数第 26 位まで (小数第 27 位以下を切り捨てによる) 計算は、現代のコンピュータによる数値計算の言葉でいうと、整数部 1 桁小数部 26 桁の固定小数点計算ということになる。整数部 1 桁というのは、計算に現れる小数点数はすべて 3.2 未満であることによる。

関が整数部 1 桁小数部 26 桁の固定小数点計算を行ったことを確認するため、MATLAB with extended symbolic MathToolbox (数値計算ソフト MATLAB から数式処理ソフト Maple を呼び出すシステム) により関の計算を再現する。

小数点以下 $d$ 桁の固定小数点計算をコンピュータでシミュレートするには、実数は $10^d$ 倍し、小数点以下は切り捨てにより計算を続ける。2 乗は結果を $10^d$ で割って小数点以下は切り捨てたのち $10^d$ 倍する。手計算の際に有限桁で打ち切ることに対応した切り捨て演算を行うのである。

直径 $10^{26}$ の円に内接する正 $2^\nu$ 角形の勾、股、$勾^2+股^2$、弦、周をそれぞれ、$U_\nu, V_\nu, X_\nu, W_\nu, S_\nu$ とする。

$$U_\nu = \left\lfloor \left(10^{26} - \left\lfloor \sqrt{10^{26}(10^{26}-X_{\nu-1})} \right\rfloor\right)/2 \right\rfloor, \quad V_\nu = \left\lfloor \frac{1}{2} W_{\nu-1} \right\rfloor$$

$$X_\nu = 10^{26}\left(\left\lfloor \frac{U_\nu^2}{10^{26}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{V_\nu^2}{10^{26}} \right\rfloor\right), \quad W_\nu = \left\lfloor \sqrt{X_\nu} \right\rfloor, \quad S_\nu = 2^\nu W_\nu$$

周についての漸化式による類似のアルゴリズムが [16, p.42] にある。

表 3 に関の計算の再現値、関の計算値および真値を示す。5 桁毎に空白をつけて表示し、下線の数字は関の計算値と異なる部分である。関が小数第 16 位から第 18 位までを 708 弱と表示している $s_{15}$ は、小数第 16 位から第 20 位まで表すと 70750 ∼ 70789 であるので、小数第 16 位から第 19 位までを中央値 7077 で置き換える。同様に $s_{16}$ の 571 強は 5713、$s_{17}$ の 759 弱は 7587 を関の値とした。

表 3　小数点以下 26 桁固定小数点計算による再現

| $\nu$ | 再現値 $S_\nu/10^{26}$ | 関の値 | 真値 $s_\nu = 2^\nu \sin(\pi/2^\nu)$ |
|---|---|---|---|
| 15 | 3.14159 26487 76985 6$\underline{6567}$ | 3.14159 26487 76985 6708 弱 | 3.14159 26487 76985 6$\underline{6949}$ |
| 16 | 3.14159 26523 86591 3$\underline{2979}$ | 3.14159 26523 86591 3571 強 | 3.14159 26523 86591 3$\underline{4580}$ |
| 17 | 3.14159 26532 88992 7$\underline{2124}$ | 3.14159 26532 88992 7759 弱 | 3.14159 26532 88992 7$\underline{6527}$ |

# 3　定周

## 3.1　定周の意味

関は 17 桁の「円周率」(直径 1 の円周の長さ) を得たにもかかわらず、「定周」として求めたのは 12 桁である。これについては様々な仮説があるが、次の結論を得た。**「定周」とは零約術を用いて円周率の近似分数を求める際に基準とする「円周率」のことである。**

『括要算法』巻貞の構成は、

求円周率術

　円率解　第一

　第二　求定周

　第三　求周径率

求弧術

求立円積率　玉法

となっている。

「円率解　第一」において環矩術により、円に内接する正 $2^2$ 角形から正 $2^{17}$ 角形までの勾股弦周を与えている。「第二　求定周」では正 $2^{15}$, $2^{16}$, $2^{17}$ 角形の周長から「定周」を求める計算式と「定周」を与えている。「第三　求周径率」では零約術の計算方法を述べ、「定周」を用いて周径率を 355/113 まで計算し、これ以上続けても分母と分子が大きくなるので 355/113 を「定率」としている。「求弧術」では「第三　求周径率」で求めた「定率」を「乃円率用周三百五十五尺径一百一十三尺」と与え、「求立円積率　玉法」では、「乗率三百五十五　除率六百七十八」と乗率は「定率」の周率、除率は径率の 6 倍を与えている。

次に関と建部賢明・賢弘の 3 人で編纂を始め、賢明が完成させたとされている『大成算経』を見てみる。巻之十二円率第一の「截周冪」では、直径一尺の円に内接する正 2 角形から正 512 角形までの矢、面冪、周冪を計算している。「定周」では、周冪に対し累遍増約術 (Richardson 補外) による途中の値を詳しく表示しながら「定周冪」を求め、「定周冪」を開平して「定周」3.14159265358979323846264 3 強を求めている。(図 5 参照。) 「定率」では、賢明の零約術 (連分数展開) により径率、周率、周数、周数と「定周」との差を表示しながら計算し、十二等の周径率 5419351/1725033 を「定率」としている。(図 6 参照。)

建部賢弘は 1722 年出版の『綴術算経』において「始関氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ル事ヲ理会シテ、一遍ニシテ止ム。故ニ十三万千七十二角ニ至ル截周ヲ以テ、十五六位ノ真数ヲ究メ得タリ。」「砕約ノ術ヲ用テ径一尺

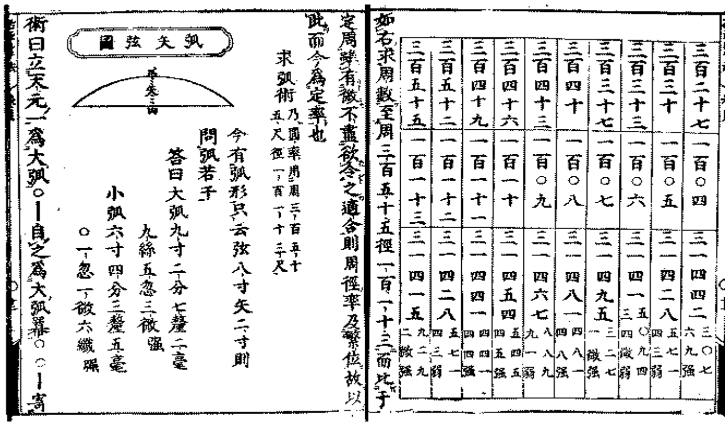


図 4　『括要算法』(東北大学・岡本刊 089) 巻貞 11 丁裏 12 丁表

ノ定周三尺一寸四一五九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三三八三二七九五〇二八八四一九七一二強ヲ求メ得テ、零約ノ術ヲ以テ径周ノ率ヲ造ル。」と記している。

建部賢明・賢弘の「定周」も関と同じ意味で用いている。賢弘は「定周」と「真数」とを明確に区別しており、「定周」は「求ル」数、「真数」は「究ル」数である。

## 3.2　定周の桁数

2 つの問題に分けて考える。

1. 関は真数を 17 桁極めたにもかかわらず、何故 12 桁の 3.14159265359 微弱を定数としたか。
2. 関は何故 12 桁の 3.14159265359 微弱を真数の近似値として適切と考えたか。

なお、「定数」を「真数 (円周率) に可能な限り近い確信の持てる近似値」と考える立場であれば、2 つの問題は同じものになる。

### 3.2.1　定周として 12 桁求めた必然性

定周とは零約術を用いて円周率の近似分数を求める際に基準とする円周率のことであるので、零約術を何桁の精度で適用するかを決めれば定周の桁数の要件 (何桁以上) が定まり、逆に定周の桁数以下の精度で零約術を適用できる。

図 4 より、関は零約術を 10 桁 (10 桁目を丸めて 9 桁表示) の精度で適用しているので、定周は 12 桁で十分である。

『大成算経』では、定周は 26 桁目を丸め 25 桁求め、周数 (= 周率/径率) も 26 桁目を丸め 25 桁、定周との差も 26 桁目を丸め 25 桁与えている。図 5,6 参照。

『括要算法』巻貞は円周率と周径率を可能な限り詳しく求めるという趣旨ではないと思われる。根拠となる仮説を 4.3 節で述べる。

### 3.2.2　12 桁の 3.14159265359 微弱を関が正確と確信した理由 (仮説)

他にも可能性はあるので、この項で述べることは１つの仮説である。

関は $t_{15}$ だけではなく、$t_2, \ldots, t_{15}$ を計算した筈である。さらに $\{t_\nu\}$ の差分 $\Delta t_\nu$ を観察したと思われる。表 4 に 2.6 節の方法で小数点以下 26 桁計算した Aitken $\Delta^2$ 法の復元値とそれらの差分を示す。

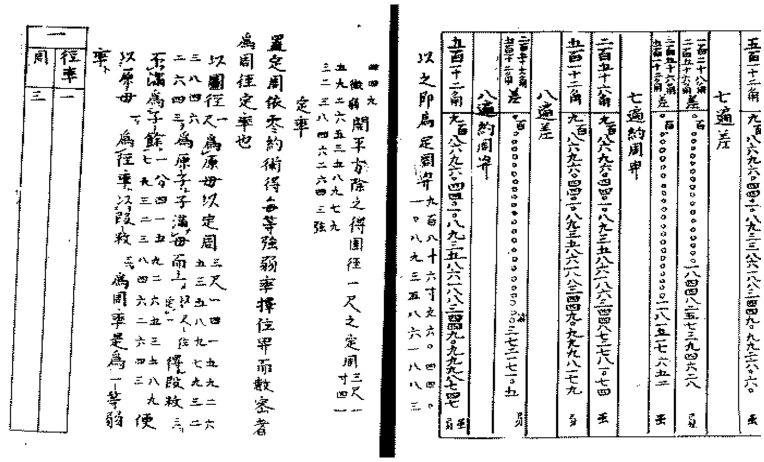


図 5　『大成算経』(東北大学・狩野 7.20820.20) 巻之十二 9 丁裏 10 丁表

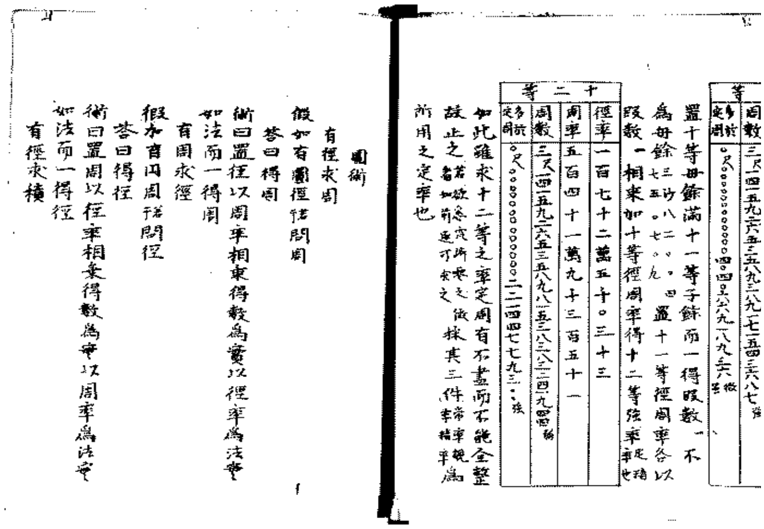


図 6　『大成算経』(東北大学・狩野 7.20820.20) 巻之十二 13 丁裏 14 丁表

$\nu$ を 1 増やす (角数を 2 倍にする) と $\Delta s_\nu$ が 16 分の 1 になるのを見て取り、$|t_{16} - t_{15}|$ は 0.00000 00000 00000 005 より小さくなるだろうと予測をし $t_{15}$ は 17 桁前後正確と判断した。そして、3.141592653589 は確実に円周率に合っていると考え、3.14159265359 微弱を定周とした。

# 4　『括要算法』と『大成算経』(試論)

## 4.1　『括要算法』巻貞「求円周率術」

『括要算法』巻貞「求円周率術」は 3.1 節で述べたように、周径率 355/113 を導く算法 (術) を示すことが最終目的である。周径率 355/113 は、1674 年発行の池田昌意著『数学乗除往来』[6] の四九問ある遺題の第一問と第四問に登場する。

第 1 問は「今平円闕有リ、只云フ矢二尺五寸二分、弦一丈二尺、闕積ヲ問フ。乃チ平円積法、径一百一十三尺、周三百五十五尺之ヲ用ユ。」、第四問は「今円率有リ、或ハ徑一周三一四二、或ハ徑七尺周二十二尺、或ハ径五十尺周一百五十七尺。師丞子ハ径一百一十三尺、周三百五十五尺ト云フ。此観ル術ヲ問フ。」である。「師丞子」は建部賢弘が『研幾算法』[13] に書いた第四問に対する解答から隅田江雲と思われる。

表 4　$\Delta^2$ 法の復元値と差分

| $\nu$ | $t_\nu$ | $t_{\nu+1} - t_\nu$ |
|---|---|---|
| 2 | 3.14223 14044 53587 77386 | −0.00059 95912 12282 65560 |
| 3 | 3.14163 18132 40761 21776 | −0.00003 67237 81541 23022 |
| 4 | 3.14159 50894 59219 98753 | −0.00000 22838 07826 67127 |
| | 中略 | |
| 13 | 3.14159 26535 89793 26781 | −0.00000 00000 00000 53551 |
| 14 | 3.14159 26535 89793 21549 | −0.00000 00000 00000 05231 |
| 15 | 3.14159 26535 89793 17414 | — |

建部賢弘は 1683 年発行の『研幾算法』で『数学乗除往来』のすべての遺題を解答している。第 4 問について建部は「環矩ノ術ニ依テ、径一ノ定周ヲ得、零約術ヲ以テ諸率ヲ得ルナリ。」と抽象的に解答し、22/7, 157/50, 355/113 は零約術で求めることができ、3.142 は「隅田氏ノ臆見ナリ」「右ノ諸率ト同ク論スヘカラス」と述べている。建部の解答は『括要算法』巻貞「求円周率術」を要約したものになっており、関は『研幾算法』に目を通し跋を書いているので、[4, p.248] にあるように、『研幾算法』出版の 1683 年には『括要算法』の「求円周率術」は完成していたと判断できる。「立円率解」が 1680 年 7 月謹書なので、内容から考えると「求円周率術」はそれ以前に完成していた可能性が高い。

賢弘が『研幾算法』を出版したのは、1680 年に佐治一平の門人である松田正則の『算学詳解』において『発微算法』が不当に批判されたことが契機になっている [9, pp.13-17][14, pp.289-291]。

### 4.2　『括要算法』の「原書」

穴沢長秀旧蔵書の『括要算法』には、穴沢の書き入れの他、松永良弼と藤田貞資の訂正を書き入れたものがある [5, p.270]。『括要算法』の荒木村英の書いた跋文の「孝和先生ノ説ニ原テ」を松永良弼が「委ク先生ノ遺録ヲ序シテ」と訂正している [5, p.370, 解説 p.153]。さらに、『括要算法』巻貞のみに「原書無之」との松永の書き込みが 5 カ所ある [5]。『括要算法』巻貞の「原書」あるいはその写本を入手していた松永は、巻貞と「原書」とを照合させながら書き込みを行ったと考えられる。『括要算法』巻貞に松永の訂正を施せば巻貞の「原書」に近づくのであろう。『括要算法』巻元亨利には「原書無之」の書き込みは見られない。

『明治前日本数学史』第二巻 [4, p.147] に基づき、『括要算法』の「原書」を一覧表 (表 5) にしておく。表 5 より、「括要算法は孝和の稿本をほとんどそのまま収録したものなることが窺われる。」[4, p.147]

表 5　『括要算法』とその「原書」(稿本)

| 『括要算法』 | 「原書」(稿本) | 稿本執筆年月 | 『括要算法』との相違 |
|---|---|---|---|
| 元 | 朶積術解 † | 欠ける | 朶積術解に倍朶が加わる † |
| 亨 | 拾遺諸約之法・翦管術解 | 1683 年 6 月重訂 | 2 巻を 1 巻にしただけ |
| 利 | 角法并演段図 | 1683 年 8 月重訂 | 極めて僅かの字句を除いて一致 |
| 貞 | 立円率解 | 1680 年 7 月謹書 | 立円率解は同一。「求円周率術」「求弧術」無し |

† 朶には土編がつく

表 5 の「原書」のうち、『拾遺諸約之法』『翦管術解』を 1 冊にまとめた写本が東北大学岡本写 0006 で公開

されている。東北大学岡本写 0259 でも別の写本が公開されているが重訂日などの記載はなく誤字もある。『朶積術解』は、東北大学 (狩野 7.20503.1)、『立円率解』は、東北大学 (狩野 7.20634.1) に所蔵されているが、画像データが公開されていないため、筆者はまだ確認してない。『角法并演段図』は東北大学のデータベースからは見つけることが出来なかったが、写本 1 丁表の写真が『関孝和全集』に掲載されている。『角法并演段図』の写真に「括要算法巻三の写本」[5, p.9] との説明があるが、「括要算法巻三の写本」であるとすると「関孝和編」とはならないはずである。同全集には『拾遺諸約之法附翦管術解』に「括要算法巻二」の「独立した写本」[5, pp.51-51] なる記述もあるが、括要算法巻二の写本なら「天和癸亥林鐘望日重訂」は記載されない。

### 4.3 『括要算法』と『大成算経』

建部賢明は『建部氏伝記』[12] に「凡倭漢ノ数学、其ノ書最モ多レトイヘトモ、未タ釈鎖ノ奥妙ヲ尽ササル事ヲ歎キ、三士 (関と建部賢明賢弘兄弟) 相議シテ、天和三年 (1683 年) ノ夏ヨリ賢弘其ノ首領ト成テ、各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ、就テ古今ノ遺法ヲ尽シテ、元禄ノ中年 (1690 年代) ニ至テ編集ス。総十二巻算法大成ト号シテ、粗是ヲ書写セシニ、事務ノ繁キ吏ト成サレ、自ラ其ノ微ヲ窮ル事ヲ得ス。孝和モ又老年ノ上、爾歳病患ニ遭ラレテ考検熟考スル事能ハス。是ニ於テ同十四年 (1701 年) ノ冬ヨリ賢明官吏ノ暇ニ躬ヲ其思ヲ精スル事一十年、広ク考ヘ詳ニ註シテ二十巻ヲ作シ、更ニ大成算経ト号テ、手親ラ草書シ畢レリ。」と書いている。

1683 年陰暦四五六月より、関孝和、建部賢明、賢弘の 3 人により「各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ、就テ古今ノ遺法ヲ尽」す編纂が始まった。編纂に先立ち、全体構成が協議されたと思われる。「関達が得た最新の結果を含めることが最初から意図されていた」[15] と考えられるので、全体構成は 4.2 節で触れたような関の (重訂前の) 著作をそのまま収録できるような構成になったのであろう。

『大成算経』と関の著作に対応関係があることが示されている [14, p.312]。それによると、『大成算経』巻之五、六、十一、十二と『括要算法』巻元亨利貞が巻の順序を保ったまま対応している。表 5 にある『拾遺諸約之法・翦管術解』は 1683 年陰暦「六月望日重訂」、『角法并演段図』は 1683 年陰暦「八月下弦日重訂」[4, p.147] なので、すでに稿本としてあったものを、『大成算経』巻之六、十一の前身の『算法大成』の相当する巻の草稿のために整理し、重訂したのであろう。『立円率解』は 1680 年陰暦七月謹書であるので、1683 年夏以降に『求円周率術』『求弧術』と併せて 1 巻とし、『大成算経』巻之十二の前身の『算法大成』の草稿にしたと思われる。『朶積術解』は、東北大学・狩野 7.20503.1 をまだ確認していないので想像の域を出ないが、狩野 7.20503.1 の元になった稿本から 1683 年夏以降の重訂時に関が倍朶を除いたのであろう。荒木が倍朶を除いた可能性も残るが。

これらが『括要算法』巻元亨利貞の「原書」になったため、関の生前に出版されることはなかった。恐らく関の遺志に反し荒木は『括要算法』を出版したのだろう。それが「働き盛りの元圭、賢弘は何故に本書の出版に関与せざりか」[5, p.344] の真相ではないか。

『括要算法』には関の序がなく、４巻ともいきなり本文から始まるのは、『算法大成』の草稿として書かれたためであろう。

『綴術算経』に繰り返される「始関氏」の記述に見られるように、関の「原書」執筆後、

1. 環矩術で周冪を用ると開平の回数が半減されることを建部賢弘が発見した。
2. 定周を求めるのに賢弘のいう「増約術」(Aitken $\Delta^2$ 法) を 1 回用いるよりは、累遍増約術 (Richardson 補外) を適用する方が格段に加速効果が高いことを賢弘が発見した。
3. 零約術は、賢明が発見した算法 (連分数展開に基づく方法) の方が、関の算法より格段に効率が良い。

などの数学上の進展があり、関もそのことを認め、関が当初執筆した『括要算法』巻貞の「原書」の「求円周率術」は建部兄弟の発見した方法に差し替えられた。

「始関氏」の「始」は『括要算法』巻貞の「原書」執筆時と考えることができる。賢弘は、『綴術算経』では『括要算法』について一言も触れてないが、「始関氏」という書き方で間接的に、荒木の『括要算法』出版を批判したのかもしれない。

この節で述べた試論は「求円周率術」を中心とする『括要算法』のみについての考察であるので、関の著作全体と『大成算経』『綴術算径』との比較検討は今後の課題である。すでに『三部抄』『七部書』については、「『大成算経』の中で『括要算法』が述べている部分を除外し、その残りの部分から関流にとって重要な内容を再構成したのではないか。」[14, p.315] との仮説が提起されている。これに対し、「元来『大成算経』編集用のスケッチとして建部兄弟に手渡すために書かれたのではなったか」[7] との推測もある。『括要算法』の「原書」についての推定から類推すると、『解伏題之法』など天和癸亥 (1683 年) から貞享乙丑 (1685 年) までに重訂あるいは謹書されたものは、『算法大成』のために関が執筆した可能性がある。

関の著作全体と『大成算経』『綴術算径』の比較により、関の数学さらには初期関流の和算に関する研究が進展すると思われる。

## 5　結論

関の方法では理論的に 19 桁の円周率を得ることができたが、17 桁しか正しい値を得ることができなかった。これは、勾の計算において情報落ちが生じたためである。情報落ちを手がかりに、関は小数点以下 26 桁 (27 桁以下を切り捨て) の計算を行ったと結論できる。関と建部兄弟にとって「定周」とは、零約術を用いて円周率の近似分数を求める際に基準となる円周率である。関が「定周」を 12 桁求めたのは、周径率 355/113 を求めるのに十分な桁数として 12 桁とったためである。

以下の仮説は今後の研究課題である。

『括要算法』は『大成算経』の前身である『算法大成』のために関が執筆した稿本を収録したものであるため、生前には出版されなかった。4.2 節で言及した「原書」を入手した荒木村英が、関の遺志に反し 4 巻分の稿本をまとめて『括要算法』として出版した。

## 謝辞

上野健爾先生から多くのご教示を頂きました。その結果、「原書」にかかわる部分と 4.3 節第 2 段落を改めました。上野先生には心より感謝致します。

## 参考文献

[1] A.C.Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser A 46(1926), 289–305.

[2] C. Brezinski, Introduction and Historical Survey, in J.P. Delahaye, Sequence Transformations, Springer, 1988

[3] C. Brezinski, Convergence acceleration during the 20th century, J. Comput. Appl. Math. 122(2000), 1-21.

[4] 日本學士院編、藤原松三郎、明治前日本數學史、第二巻新訂版、岩波書店、1956

[5] 平山・下平・広瀬共編、關孝和全集、大阪教育図書、1974

[6] 池田昌意、数学乗除往来、東北大学岡本刊、請求番号 043

[7] 小松彦三郎、「大成算経」校訂本作成の現状報告、数理解析研究所講究録、1546(2007), 140–156

[8] 森本光生、UBASIC による解析入門、日本評論社、1992
[9] 小川・佐藤・竹之内・森本、建部賢弘の数学、共立出版、2008
[10] 長田直樹、収束の加速法、数理解析研究所講究録 880(1994), 28–43.
[11] 長田直樹、お話：数値解析第 5 回、収束の加速法 (前編)、理系への数学、2008 年 9 月号, 56–61.
[12] 建部賢明、建部氏伝記抄録、東北大学岡本写、請求番号 1002
[13] 建部賢弘、研幾算法、東北大学岡本刊、請求番号 048
[14] 佐藤賢一、近世日本数学史　関孝和の実像を求めて、東京大学出版会、2005
[15] 上野健爾、私信、2008 年 9 月 16 日
[16] 和田秀男、高速乗算法と素数判定法、上智大学数学講究録 15(1983)

## 付録：Aitken $\Delta^2$ 法の導出 (試論)

関が Aitken $\Delta^2$ 法をいかに導出したかについては諸説ある。いずれの説も無限等比級数の和の公式 (増約術) に基づく説明である。これには、

1. 建部賢弘が『綴術算経』において「始関氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ル事ヲ理会シテ一遍ニシテ止ム」と述べている。
2. 松永良弼が『起源解』[4, pp.180-181] で増約術による説明を行った。

などが背景にあるだろう。

増約術に基づかない仮説を提起する。関は、村松茂清の『算俎』などから 3.1415926 までは正しいと確信していた。関は角数の少ないところを観察し、差分の比と誤差 (真値は 3.1415926 を代用) の比が同じ値に近づいていくことを知った。

定周との差は、『大成算経』巻十二 (図 6) に表れるので、関が誤差を調べることは十分可能性はある。

表 6　差分の比と誤差の比

| $\nu$ | 差分の比 $\dfrac{s_{\nu+2}-s_{\nu+1}}{s_{\nu+1}-s_\nu}$ | 誤差の比 $\dfrac{s_{\nu+1}-pi}{s_\nu-pi}$ $pi=3.1415926$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.25737044 | 0.25585560 |
| 3 | 0.25181592 | 0.25144976 |
| 4 | 0.25045234 | 0.25035972 |
| 5 | 0.25011298 | 0.25008241 |
| 6 | 0.25002824 | 0.24999073 |

そこで、未知の円周率 $s$ は

$$\frac{s_{\nu+2}-s_{\nu+1}}{s_{\nu+1}-s_\nu}=\frac{s_{\nu+1}-s}{s_\nu-s}$$

を満たすと仮定し、$s$ について解くと、

$$s=\frac{(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})s_\nu-(s_{\nu+1}-s_\nu)s_{\nu+1}}{-(s_{\nu+1}-s_\nu)+(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})}=s_{\nu+1}+\frac{(s_{\nu+1}-s_\nu)(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1}-s_\nu)-(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})}$$

となり、$\Delta^2$ 法が導かれる。