

## 6 行列式の基本法則と効率的な計算法

**基本法則.** 三次以上の行列式についても, 二次の場合と同様な法則がなりたつ. ここには三次の場合を例示するが, 四次以上でも同様である.

1. 単位行列の行列式の値は 1 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. 二つの列を入れ替えると行列式の値は  $-1$  倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. 一つの列の各要素を  $c$  倍すると行列式の値は  $c$  倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. 一つの列の各要素が二つの数の和であるとき, 行列式の値は例えばつぎのように二つの行列式の和として表せる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

論理的には以上の四つの法則だけから行列式の性質はすべて導かれる. しかし, つぎの法則もよく使われるので, 知っておくに値する.

5. 転置することによって行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

従って, 列に関してなりたつことは行に関してもなりたつ.

6. 二つの列の一致する行列式の値は 0 である. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

7. 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ca_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 6.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$  を上述の法則のいくつかをもちいて計算してみる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \quad \square$$

問 18. 上の例の計算について説明せよ. □

上の例では井関-ヴァンデルモンドの方法で展開するのに先立って第 1 行の要素が一個を除いて 0 になるように変形した. 従って余因子 3 個のうち 1 個だけを計算して展開できた. この考え方は次数の高い行列式に対してとくに有効である. 一つの行または列の中になるべく多く要素 0 を作るように変形しておいて, その後で展開するのが効率的である. 要素 0 に対応する余因子は計算しなくてよいからである. なお, 井関-ヴァンデルモンドの展開に先立って行列式を変形して要素 0 を作る計算法はヨーロッパで考えられたものであり, 和算にはみられない.

$$\begin{aligned} \text{例 7. } & \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a+1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \\ & (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}, \text{これを第 1 列で展開して} \\ & (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

問 19. 上の例の計算について説明せよ. □

$$\text{問 20. } \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 \text{ を確かめよ.} \quad \square$$

$$\text{問 21. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ を確かめよ.} \quad \square$$

クラームルの公式. つぎにクラームルの公式を三元の例で考えてみる. 三元一次連立方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

の係数行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を考える. 係数行列式の第 1 列を方程式の定数項で置き換えた行列式  $D_1$  を考える. 方程式がみたされているとすると  $b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$  などがなりたつから, これらを代入して

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{22}x_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{32}x_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = D \cdot x_1. \end{aligned}$$

すなわち  $D_1 = Dx_1$ . 同様に

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

と書くと  $D_2 = Dx_2$ ,  $D_3 = Dx_3$ . ゆえに, 係数行列式  $D$  が 0 でないときは

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

**問 22.** クラームルの公式を導いた上記の計算について説明せよ. □

**問 23.** 逆に  $D \neq 0$  のとき  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ,  $x_2 = \frac{D_2}{D}$ ,  $x_3 = \frac{D_3}{D}$  がもとの方程式をみたすことを示せ. □

$D = 0$  の場合は  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_3 = 0$  ならば不定であり,  $D_1, D_2, D_3$  の少なくとも一つが 0 でないならば不能である. 逆に, 方程式が不定または不能ならば  $D = 0$  である. 方程式が不能または不定になることについての考察は線型代数学の問題である. とくに不定の場合に解の全体のなす集合の構造を考えることがおもしろい.

**消去法の原理.** 右辺の定数項がすべて 0 の三元一次連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

を考えてみる. このように定数項がすべて 0 であるとき, その一次連立方程式は同次<sup>17</sup>であるという. この場合,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  という解のあるこ

<sup>17</sup>英語では homogeneous.

とはあきらかだから、この方程式は不能ではあり得ない. 係数行列式を  $D$  とおくと、 $D = 0$  ならば不定になり  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  以外にも解がある. 逆に  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  以外に解があれば不定であるから  $D = 0$ . このことは三元の場合に限らず、あらゆる同次一次連立方程式についてなりたつ. すなわち、同次  $n$  元一次連立方程式に  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  以外の解のあるための必要十分条件は、その係数行列式の値が  $0$  になることである. この事実を“消去法の原理”とよぶ.

**問 24.** 三つの二次方程式

$$a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} = 0,$$

$$a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} = 0,$$

$$a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33} = 0$$

を同時にみたす  $x$  があれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

である. □

**余因子の性質.** つぎに、たとえば三次の行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を考え、

その第 1 行第  $j$  列余因子 ( $j = 1, 2, 3$ ) を  $A_{1j}$  とする. 第 1 行の余因子の値は

第 1 行の要素に依存しないから、 $D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を考えると  $D'$  の第

1 行第  $j$  列余因子も同じく  $A_{1j}$  である. そこで行列式  $D'$  を第 1 行で展開すると  $D' = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$  となる. ところが行列式の基本法則から  $D' = 0$  となるから、 $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$  がわかる. つまり三次の任意の行列式  $D$  の第 2 行要素と第 1 行余因子との積和は  $0$  に等しい. 一般に、任意の行列式について、異なる行の要素と余因子との積和は  $0$  である. この事実は井関-ヴァンデルモンドの展開とともに余因子に関する最も基本的な定理であり、逆行列を余因子であらわす公式などを導くのに線型代数学で使われる.

**行列式の積.** 二つの行列式の積を行列式であらわすことができる. 三次の行

列式で例示すると  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

がなりたつ。つまり第一の行列式の第  $i$  行と第二の行列式の第  $j$  列との積和を第  $i$  行第  $j$  列要素とする行列式を作ると、これが二つの行列式の積に等しい。

**問 25.** 二次の行列式の場合についてこの事実を確かめよ。  $\square$

余因子に関する法則と行列式の積をあらわす行列式とをもちいると、つぎのような計算ができる。

**例 8.** 行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  を考え、その第  $i$  行第  $j$  列余因子 ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ) を  $A_{ij}$  とし、 $A_{ij}$  を第  $j$  行第  $i$  列要素とする行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \text{ を考えてみる.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = D^3,$$

ゆえに  $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = D^2.$   $\square$

**問 26.** 上の例について説明せよ。  $\square$

## 7 一次連立方程式以外の行列式の応用

一次連立方程式については、数值的に解くにはクラームルの公式をもちいて行列式の計算で解くよりも行列の変形による消去法の方が計算が簡単である。行列の変形で一次連立方程式を解く方法はガウス<sup>18</sup>の消去法とよばれているが、中国で昔から知られている。行列については説明を省くが、ドナルド・コーエン& 新井紀子: “アメリカ流 7 歳からの行列”などを参照。

一次連立方程式について行列式の恩恵のあるのは文字係数の方程式についての理論的な考察の場合などである。これに反して、二次以上の連立方程式については、理論的な扱いだけでなく数值的に解く場合も含めて、行列式が役立つ。

関孝和ははじめから任意の次数の連立方程式を考え、行列式をもちいて消去法を行うことを考えている。二次以上の連立方程式の消去法はむずかしいので説明を省くが、未知数を含んだ式を要素とする行列式をもちいて計算できる。なお、二次以上の連立方程式の場合は、どんな消去法によっても、消去した結果の一元方程式の次数の高くなることは避けられない。関孝和が行列式とその応用を述べた“解伏題之法”には、3 元 4 次連立方程式から未知数を二つ消去して一元 54 次方程式を導いた例がある。また 6 元 6 次連立方程式で消去法の結果が一元 1458 次方程式になる例題がある。

**問 27.** \*行列式をもちいて二次以上の連立方程式を解く関孝和の方法について調べよ。 □

**座標と行列式.** 和算には座標の考えがなかったのに対し、ヨーロッパでは座標をもちいて幾何学の問題を代数的に扱うことをデカルト<sup>19</sup>が始めてから、座標<sup>20</sup>がひろくもちいられるようになり、やがて行列式と座標との関係も考察された。

座標平面上で四点  $(0, 0)$ ,  $(a, c)$ ,  $(a + b, c + d)$ ,  $(b, d)$  を頂点とする平行四辺形の“符号付き面積”は行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

の値に等しい。ただし、符号付き面積とは、頂点を

$$(0, 0) \longrightarrow (a, c) \longrightarrow (a + b, c + d) \longrightarrow (b, d) \longrightarrow (0, 0)$$

順にたどったときに左回りなら正、右回りなら負の符号をつけたものである。また四点  $(0, 0)$ ,  $(a, c)$ ,  $(a + b, c + d)$ ,  $(b, d)$  が一直線上にあるための条件は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

<sup>18</sup>C. F. Gauss, 1777–1855.

<sup>19</sup>R. Descartes, 1596–1650.

<sup>20</sup>詳しくは直交座標系。創案者の名にちなんでデカルト座標系 (Cartesian coordinates) ともいう。

である.

**問 28.** これらの事実を確かめよ. □

**問 29.** 座標平面上の三点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  を頂点とする三角形の符号付き面積は

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

の値に等しい. 符号は, 頂点を

$$(x_1, y_1) \longrightarrow (x_2, y_2) \longrightarrow (x_3, y_3) \longrightarrow (x_1, y_1)$$

の順にたどったとき左回りなら正, 右回りなら負とする. また三点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  が一直線上にあるための条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

である. なぜか. □

座標平面上の点  $(x, y)$  を点  $(ax + cy, bx + dy)$  に写す一次変換を考えると, 図形をこの一次変換で写したときに面積はもとの図形の面積の

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ 倍}$$

になる. さらに, この一次変換が正則であるための条件すなわち逆変換のあるための条件は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

である. ドナルド・コーエン& 新井紀子: “アメリカ流 7 歳からの行列” の第 6 章を参照.

**問 30.** \*行列, 一次変換などについて調べよ. □

平面すなわち二次元の場合について述べたが, 三次元以上でも同様なことがなりたつ. たとえば三次の行列式は三次元空間の一次変換で図形が写されたときの体積の比を表している. 空間図形の体積も座標と行列式で求めることができるが, 説明は省く. さらに, 一次変換の逆変換も行列式と余因子とをもちいて計算できる. 線型写像 (一次変換) と行列式との関係は線型代数において大切なテーマの一つである.