第 8 章 (補) 有限母集団の場合の推測

浅川 伸一

2006 年 06 月 15 日

有限母集団の場合の母平均の期待値とその分散を求めることを考える。大文字の X を母集団における値とし、小文字の x を標本を表すものとする。有限母集団では、それぞれの値に順に番号をつけることが可能なので、それぞれの値を $X_1, X_2, \cdots, X_N$ と表記する。一方、標本のデータを小文字 x で表すことにする。こちらも番号をふることが可能であるので、$x_i, x_2, \cdots, x_n$ とする。

有限母集団の場合の標本平均の期待値は

$$E\left(\bar{x}\right) = \mu \tag{1}$$

となり、無限母集団の場合と同じである。一方標本平均の分散は、母集団の大きさを N とし、抽出された標本のデータ数を n とすると

$$V\left(\bar{x}\right) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} \tag{2}$$

となる。$(N-n)/(N-1)$ のことを有限母集団の修正項などという。母集団の大きさが大きければ $N \to \infty$ 母集団修正項は 1 となり無限母集団の場合のそれと一致する。

また標本分散の期待値、より正確には不偏分散は

$$E\left(s^2\right) = \frac{N}{N-1}\sigma^2 \tag{3}$$

である。この場合も $N \to \infty$ では、母集団修正項は 1 となり無限母集団の場合のそれと一致する。

j 番目のデータ x_j が選ばれる期待値は

$$E(x_j) = X_1P_1 + X_2P_2 + \cdots + X_NP_N = \sum_{i=1}^{N} X_iP_i \tag{4}$$

である。母集団における i 番目のデータ X_i が j 番目の標本として選ばれる確率 p_j は、1 番目の標本から $j-1$ 番目の標本までは選ばれず、j 番目に初めて選ばれることを意味するので、

$$p_j = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \cdots \cdot \frac{N-j+1}{N-j+2} \cdot \frac{1}{N-j+1} = \frac{1}{N} \tag{5}$$

右辺第 1 項分子 $(N-1)$ と 第 2 項分母 $(N-1)$ が同じなので、約分して整理することができることに注意。このことはいかなる p_j についても成り立つので、各サンプルが選ばれる確率は $1/N$ ということになる。

このようにして、式 (4) は

$$E(x_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \mu \tag{6}$$

である。従って標本平均の期待値、式 (1) は

$$E\left(\bar{x}\right) = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right\} = \frac{1}{n}E\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\} = \frac{1}{n}[n\mu] = \mu \tag{7}$$

となる。

標本平均の分散、式 (2) については、

$$V\left(\bar{x}\right) = E\left(\bar{x}^2\right) - \left\{E\left(\bar{x}\right)\right\}^2 = E\left(\bar{x}^2\right) - \mu^2 \tag{8}$$

であるから、右辺第 1 項 $E(\bar{x}^2)$ を考える。

$$\begin{aligned}
E\left(\bar{x}^2\right) &= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right] && (9)\\
&= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}^{n} x_j x_k\right] && (10)\\
&= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right] + \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}^{n} x_j x_k\right] && (11)\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right] + \frac{1}{n^2}\left[\frac{{}_nC_2}{{}_NC_2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l\neq i}^{N} X_i X_l\right]. && (12)
\end{aligned}$$

ここで

$$\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l\neq N}^{N} X_i X_l = (N\mu)^2 \tag{13}$$

なので

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l\neq N}^{N} X_i X_l = N^2\mu^2 - \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \tag{14}$$

である。それぞれの X が μ であり、これを総べてたし合わせて 2 乗するので、$\mu\times\mu=\mu^2$ が $N\times N=N^2$ 個あるからである。これを式 (12) に代入す

れば、

$$
\begin{aligned}
E(\bar{x}^2) &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2\right] + \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left(N^2\mu^2 - \sum_{i=1}^{N}X_i^2\right)\right] &(15)\\
&= \frac{1}{nN}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i^2 + \frac{n-1}{N-1}\left(N^2\mu^2 - \sum_{i=1}^{N}X_i^2\right)\right] &(16)\\
&= \frac{1}{nN}\left(\frac{N-1}{N-1} - \frac{n-1}{N-1}\right)\sum_{i=1}^{N}X_i^2 + \frac{1}{nN}\frac{n-1}{N-1}N^2\mu^2 &(17)\\
&= \frac{1}{nN}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 + \frac{N(n-1)}{n(N-1)}\mu^2 &(18)
\end{aligned}
$$

となる。これを式 (8) に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
V(\bar{x}) &= \frac{1}{nN}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 + \frac{N(n-1)}{n(N-1)}\mu^2 - \mu^2 &(19)\\
&= \frac{1}{nN}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 + \left(\frac{N(n-1) - n(N-1)}{n(N-1)}\right)\mu^2 &(20)\\
&= \frac{1}{nN}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 - \left(\frac{N-n}{n(N-1)}\right)\mu^2 &(21)\\
&= \frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 - \mu^2\right) &(22)\\
&= \frac{N-n}{N-1}\cdot\sigma^2 &(23)
\end{aligned}
$$

となって式 (2) となる。

最後に標本平均の不偏分散を考える。

$$
\begin{aligned}
(n-1)E(s^2) &= E\left[\sum_{j=1}^{n}x_j^2 - n\bar{x}^2\right] &(24)\\
&= E\left[\sum_{j=1}x_j^2\right] - nE\left(\bar{x}^2\right) &(25)
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項は母集団のデータ X_i が n 個あるので $\dfrac{n}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}X_i^2$ である。右辺第

2 項は式 (18) を用いる。そこで

$$
\begin{aligned}
(n-1)E(s^2) &= \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left[\frac{1}{N}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \frac{N(n-1)}{N-1}\mu^2\right] && (26)\\
&= \left(\frac{n}{N} - \frac{N-n}{N(N-1)}\right)\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{N(n-1)}{N-1}\mu^2 && (27)\\
&= \left(\frac{n(N-1)-(N-n)}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{N(n-1)}{N-1}\mu^2\right) && (28)\\
&= \frac{N(n-1)}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\mu^2\right) && (29)\\
&= \frac{N(n-1)}{N-1}\cdot\sigma^2 && (30)
\end{aligned}
$$

となって式 (3) が導かれた。