第 2 章 確率で用いられる記号

浅川 伸一

2006 年 04 月 20 日

2　組合せを表す記号

基本的に数学の記号というのは、スペースを節約するためであることが多い。3 回コインを投げた場合すべとの可能な出方を尽くすと何種類あるか？という問にを考える。1 回のコイン投げに対する出方は H か T かの 2 とおりであるから、3 回繰り返すと $\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2\text{ を 3 回かける}} = 2^3 = 8$ であった。ところがこの 8 とおりのうち、順番を考慮しない、つまり組合せの数となると、重複して数えているので話が違ってくる。3 回のコイントスうち 0 回 H がでる場合の実例は TTT の一とおりしかない。3 回のコイントスうち 1 回 H がでる場合の実例は TTH, THT, HTT の三とおりある。3 回のコイントスうち 2 回 H がでる場合の実例は THH, HTH, HHT の三とおりある。3 回のコイントスうち 3 回 H がでる場合の実例は HHH の一とおりしかない。すなわち、全部の場合を数えて重複の数を数え上げるとすると、3 個のうちから 0 個とる組合せの数は 1 とおり、3 個のうちから 1 個とる組合せの数は 3 とおりである、などという。

1 回のコイントスで H が 0 回出るのは 1 とおり、これは自明。H が 1 回出る場合も 1 とおり。2 回のコイントスで H が 0 回出るのは 1 とおり、1 回出るのは 2 とおり、2 回出るのは 1 とおりである。一般化すると n 回のコイントスで k 回 H が出るのは何とおりあると考えられるだろうか？

2.1　順列

春日正文編、数学モノグラフ 24 公式集、科学新興社より

和の法則 2 つの事柄 A, B があって、これらは同時には起こり得ないものとする。このとき A 起こり方が m 通り、B の起こり方が n 通りであるとすれば、A, B のどれかが起こる場合の数は $m + n$ とおりである。

積の法則 2 つの事柄 A, B があって、A の起こり方が m 通りあり、そのおのおのの起こり方に対して B の起こり方が n 通りあるとすれば、A と B とがともに起こる場合の数は mn 通りである。

表 1: 階乗の値

m	$m!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800

相異なる n 個のものから r 個取り出す順列 permutation の数を ${}_nP_r$ で表すと

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個}} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1} $$

ただし $(r \lg n)$。とくに $r = n$ のときには ${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ と表記し階乗 factorial という。

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2\times 1 = 2,\ 3! = 3\times 2! = 3\times 2\times 1 = 6,\ 4! = 4\times 3! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24,\ 5! = 5\times 4! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

2.2 組合せ

異なる n 個のものから r 個取り出す組合せ (順番を考慮しない) の数を ${}_nC_r$ と書き

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}(r \leq n) \tag{2} $$

${}_nC_0 =_n C_n = 1,\ {}_nC_k =_n C_{n-k}$