第 1 章 コイン投げの確率

浅川 伸一

2006 年 04 月 13 日

1 心理テストとコイン投げは関係あるか

あるマスメディアが、その注目度をあげるための手段として、よく検討されていない安易な心理テストが紹介されることがある。例えば「あなたの***度チェック！次の質問に 5 つ以上あてはまったらあなたのも***」のごとくである。自分自身のある心理的特徴について、あてはまっていれば 1, そうでなければ 0 と答える、という心理テストを考える。このテスト結果と、コインを数回投げて、表 (以下 H: head と略記する、裏は T: tail とする) の出る確率 $P(H)$ を考える。このとき次のような問いかけには、どのように答えるだろうか。

1. デタラメに 1 と 0 を回答した場合と、真剣に考えて答えた場合とを区別できるだろうか。(デタラメとは P(1) と P(0) の出方に規則性がないという意味なので $P(1) = P(0) = 1/2$ と考えることができるだろう。すると真剣に答えた場合 $P(1) \neq P(0)$ であると考えられるがどうすれば $P(1) \neq P(0)$ を主張できるだろうか)
2. 専門家が作った心理テストに答える場合と、もっともらしく装ったニセモノ心理テストとを、テスト結果から判定できるだろうか？(沢山の回数コインをなげれば、そのコインの $P(H)$, $P(T)$ は 1/2 であるか否かが判定できるだろうか？)
3. もし専門家が作った心理テストから予想される回答が各設問について 1/2 の確率であったとしたら、信頼できる心理テストとデタラメな心理テストを区別する方法があるだろうか？
4. 信頼できる心理テストとはどういう性質を持っていなければならないのだろうか？

ある心理テストが真に意味あるものであるのならば、予測可能性、安定性、妥当性などについて一定の規準を満たしていなければならないだろう。

2　ナイーブな確率の考え方から始めると

コインを三回投げて HHH となる確率はどのくらいか?図 1 では、コインの取りうるすべての可能な場合が描かれている。一回目は H または T なので 2 とおり、二回目はそれぞれについてまた H か T なので $2\times2=4$ とおり、三回目はそれぞれについてさらに H か T かの二とおりなので $2\times2=8$ とおりである。従ってすべての可能な出方が 8 とおりあって、そのうちの一つ HHH

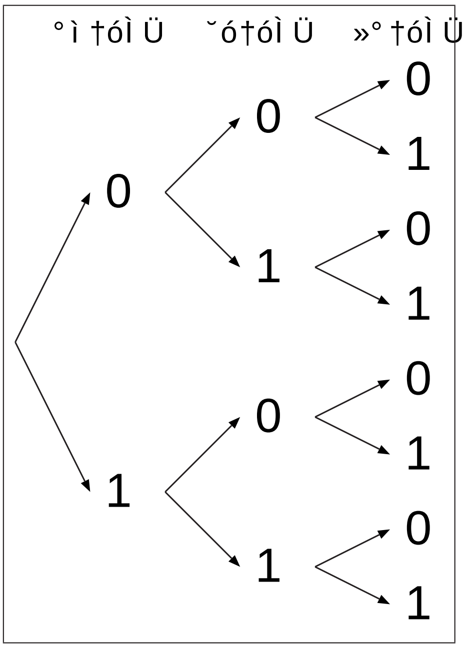

図 1: コインを三回投げたときのすべての可能な出方

という事象 event が現れたのだから、その確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ ということになる。図 1 でもわかるとおり、$HHH(000)$ となるのは 8 とおりのうち確かに 1 回だけなので、その出現確率は $P(HHH)=\dfrac{1}{8}$ と考えられる。

同じように HTH となる確率も TTH となる確率もすべて等しく $\dfrac{1}{8}$ である。つまり出た順番も考慮 (一回目の H or T と二回目の H or T とを別物だと考えれば) すれば、すべての場合を考慮に入れなければならない、ということである。

これはコインを三回投げたときに限らない (コインを三回投げるという行為だけ特別あつかいする必要は何もないので)。コインを 4 回投げても 5 回投げても同じことがあてはまると考えて良いだろう。コインを 4 回投げた場合、可能な出方は、$2\times2\times2\times2=2^4=16$ とおりである。さらに一般化して考えるならば、コインを n 回投げた場合、可能な H と T の出方は全部で

$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ 回のかけ算}} = 2^n$ とおりとなる。従って任意の H, T の記号列が出現する確率は、どれもすべて等しく $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ となる。

2.1 脱線：2 進数

図 1 で H が 1 で T が 0 ならば、わざわざ表と裏の順番を入れ換えて一回目が 0、二回目が 0、三回目が 0 、この場合を 000 と表記することにすると、が一番上に来ているのか？と疑問に思うかもしれない。これは二進数の表記を意識したものである。すなわち表 2.1 のような対応関係があるので、意図

表 1: 十進数と二進数の対応関係

十進数	二進数
0	$0_{(2)}$
1	$1_{(2)}$
2	$10_{(2)}$
3	$11_{(2)}$
4	$100_{(2)}$
5	$101_{(2)}$
6	$110_{(2)}$
7	$111_{(2)}$
8	$1000_{(2)}$

的にひっくり返してある。十進数で 0 は二進数でも 0 であるが、十進数で 2 は二進数では $10_{(2)}$ となる。しばしば下着き文字 $_{(2)}$ は省略することもある (わずらわしいので)。十進数で使う数を現す記号は 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 10 とおり (だから十進数と言う) であるが、二進数では 2 つの記号 (0 と 1) しか用いられない。

2.2 脱線：ギャンブラーの誤謬 gamblers' fallacy

たとえば 10 回コインを投げて HHHHHHHHHH となったとき、11 回めは H が出るか T が出るかを予想する。このとき「10 回も H が続いたのだから、次も H だろう」という予想。反対に「10 回も H が続いたのだからそろそろ T が出るだろう」という予想。どちらの予想も誤りである。これがギャンブラーの誤り gambler's fallacy と呼ばれるものだ。この予想が誤りであることを確認するのはたやすい。コインに記憶装置など着いていないのだから、たとえ 1 万回 H が続いても、次の 1 万 1 回めが H である確率と T である確率は、過去の成績にはまったく縛られない。どのような過去があるにせよ

コインがそれを記憶しておく機構が備わっていないかぎり、次に H になるか T になるかは、そのコインの持つ確率に何ら変化を及ぼさない、のである。

2.3　順番を考慮しないとすると (組合せの数)

上の議論は一回目に出た目 (H or T) と二回目に出た目を区別して考えていた。

少し問題を変更して、3 回コインを投げたときに k 回 H が出た確率は？、という問にすると、少し事情が違ってくる。あるいは 3 枚のコインを同時に投げたときに k 枚のコインが H である確率と考えても良い。この場合は順番を考慮しない、という点が重要である。HHT と HTH と THH はすべて同じ 2 回 (あるいは同時に 3 枚のコインを投げた場合に 2 枚) H が出という意味では同じである。順番を区別する例では 3 回コインを投げたときの出方が $2^3 = 8$ とおりであったが、今度はそういうわけにはいかない。別の言い方をすると、順番は関係なく H が出た回数と T が出た回数の「組合せ」の回数だけ考えることにすると、H の出方は 0 回か 1 回か 2 回か 3 回かのいずれかである。そうだとすると 表 2.3 のようになるので、$P(0) = 1/8$, $P(1) = 3/8$,

表 2: 3 回コインを投げたときに何回 H が出たかの表

H の出方	何とおり？	実例
0	1	TTT
1	3	TTH, THT, HTT
2	3	THH, HTH, HHT
3	1	HHH

$P(2) = 3/8$, $P(3) = 1/8$ となる。