線形数学 Linear algebra

浅川伸一

平成 18 年 11 月 9 日

1 Vector

いくつかの数値をまとめて表現する方法である．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ これに対して, 普通の意味での数値をスカラ scalor という．

行ベクトル raw vector とは n 個の数値が横に並んだもので，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表記する．列ベクトル column vector とは n 個の数値が縦に並んだもであり，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{b}^t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ とベクトルの肩に t や $'$ をつけて表記することもある．

1.1 ノルム

ベクトルのノルム norm あるいはユークリッドノルムとはベクトルの長さのことであり，$|a| = \sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}} = \sum_i a_i^2$ と表記する．$|\boldsymbol{x}| = 1$ ならば正則化されたベクトルという．

1.2 内積

同じ次元をもつ 2 つのベクトルの内積 inner product を $\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}$ または $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ と表記する．これは $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ である．2 つのベクトルなす角 θ は

$$\cos\theta = \frac{(a \cdot b)}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|} \tag{1}$$

である．内積は 2 つのベクトルの共線性，すなわち平行の度合の尺度となり，特に $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = 0$ ならばそれら 2 本のベクトルは直交し，$|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$ ならばそれら 2 本のベクトルは平行である．ベクトルのノルムと内積については以下の関係が成立する．

1. $|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})$
2. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
3. $(\alpha \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \alpha \boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
4. $|\boldsymbol{a}|^2 = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

ここで α はスカラである．

ベクトルの内積からコーシー・シュワルツ Cauchy–Schwarz の不等式

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \quad \leq \quad |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 \tag{2}$$

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \quad \leq \quad \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \tag{3}$$

が導き出せる．

証明は，任意の実数 t に対して

$$|\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2t\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + t^2\,|\boldsymbol{b}|^2 \geq 0 \tag{4}$$

が常に成立するためには，判別式 D が負であればよい．従って

$$D = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 \leq 0 \tag{5}$$

ゆえに

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 \tag{6}$$

が成り立つ．

1.3　ベクトル間の距離

2 本のベクトル間の距離を

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \tag{7}$$

と定義すれば，次のことが成り立つ．

1. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0$
2. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
3. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$
4. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \geq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

最後のものは，いわゆる三角不等式とよばれるものである．

2　行列 Matrix

数値を縦横の矩形に配置したものを行列という．$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ などと表される．これは i 行 j 列目の要素が a_{ij} であるという意味である．行数と列数の等しい行列を正方行列という．

すべての要素が 0 である行列を零行列といい $\mathbf{0}$ と太文字を使って表される．

ある行列の行と列とを入れ換えた行列を転置行列といい，行列の肩に t または $'$ をつけて表す $\boldsymbol{A}' = (a_{ji})$．転置行列には次のような性質がある．

- $\left(\boldsymbol{A}'\right)' = \boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$
- $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

転置行列ともとの行列が等しいとき，その行列を対称行列という $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$．$a_{ii}$ 要素がゼロでなく，他の要素が全てゼロ $a_{ij} = 0, (i \neq j)$ である行列を対角行列という．$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$ 対角要素が全て 1 の対角行列を単位行列といい $\boldsymbol{I} = (\delta_{ij})$ などと表す．ここで，δ はクロネッカー kronecker のデルタと呼ばれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{8}$$

である．

2.1　行列のスカラ倍

行列のスカラ倍とは行列の各成分をスカラ倍したものであり，次のような演算が許される．ここで $lambda$ はスカラである．

- $\lambda \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda$
- $(\lambda + \mu)\, \boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{A}$
- $\lambda\, (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$

2.2　行列の和

行列の和は対応する各要素を加えたものである．このため行数と列数が等しい行列間でしか行列の和は定義されない．行列の和には次のような規則がある．

- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

2.3　行列の積

2 つの行列の積は次のように定義される．

$$\boldsymbol{A}_{nm}\boldsymbol{B}_{ml}=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\right) \tag{9}$$

一般に $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ である．行列の積には次のような性質がある．

- $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{BC})$
- $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
- $\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$

2.4　行列式

一般に $d\times d$ の正方行列の行列式はスカラで $\det(\boldsymbol{A})$ あるいは $|\boldsymbol{A}|$ などと表す．

2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$ の行列式は $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ とすれば, $a_1b_2-a_2b_1$ であり，この 2 本のベクトルによって作られる平行四辺形の面積に等しい．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta &= |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} && (10)\\
&= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\left\{\frac{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2}\right\}} && (11)\\
&= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} && (12)\\
&= \sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2} && (13)\\
&= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} && (14)\\
&= a_1b_2-a_2b_1 && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ の列をベクトルと考え，それらのベクトルが線形独立ではないとすると $\boldsymbol{A}$ の行列式は 0 になる．逆行列が存在するためには行列式が 0 であってはならない．

一般の正方行列の行列式は，小行列展開と呼ばれる方法で計算でき，再帰的に定義できる．すなわち，行列 $\boldsymbol{A}$ の i 行 j 列を除いて得られる $m-1$ 行

$m-i$ 列の小行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを a_{ij} の余因子 cofactor といい, A_{ij} と表記する．このとき次の関係が成り立つ．

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} \tag{17}$$

$|\boldsymbol{A}_{ij}|$ が分かれば $\boldsymbol{A}$ の行列式は第 1 列に対して次のように展開できる．ここで符合が交互に変わる．

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11} |\boldsymbol{A}_{11}| - a_{22} |\boldsymbol{A}_{21}| + a_{31} |\boldsymbol{A}_{31}| - \cdots \pm m_{d1} |\boldsymbol{A}_{d1}| \tag{18}$$

この過程はより小さい行列の行列式に対して再帰的に繰り返し適用できる．
行列式には次のような性質がある．

- 対角行列, 三角行列の行列式はすべての対角成分の積に等しい．$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $\boldsymbol{A}$ の任意の 2 列（行）を入れ換えると $|\boldsymbol{A}|$ の符号が変わる
- $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$
- $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$
- $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$
- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

2.5　逆行列

正方行列の行列式が 0 でなければ逆行列が存在する．行列 $\boldsymbol{A}$ にある行列を掛けて答が単位行列になるような行列を逆行列といい $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ と表される．逆行列には次の性質が成り立つ．

- $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$
- $\left(\boldsymbol{A}'\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'$
- $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $\left(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$

次の逆行列を求めよ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{M}$ が正方行列でないときや，行列 $\boldsymbol{M}$ の列が線形独立でないため逆行列 $\boldsymbol{M}^{-1}$ が存在しないとき次の擬似逆行列 $\boldsymbol{M}^{\dagger}$ が定義できる．

$$\boldsymbol{M}^{\dagger} = \left[\boldsymbol{M}^{t}\boldsymbol{M}\right]^{-1}\boldsymbol{M}^{t} \tag{19}$$

擬似逆行列は $\boldsymbol{M}^{\dagger}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$ が保証されるので最小問題を解くとき便利である．

2.6 直交行列 orthogonal matirx

$\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}$，　$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}^{-1}$ を満たす行列を直交行列という．

2.7 トレース Trace

．$d \times d$ の正方行列の対角要素の和をトレースといい $\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ のように表す．行列のトレースには次の性質がある．ここで c, d はスカラである．

- $\mathrm{tr}\ (c\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{B}) = c\,\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{A}) + d\,\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{B})$
- $\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\ (\boldsymbol{BA})$
- $\mathrm{tr}\ \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2}$
- $\mathrm{tr}\ \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}' = m$　　(ただし $\boldsymbol{A}$ は $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = m$ の $n \times m$ 行列)
- $\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\ (\boldsymbol{BA})$
- $\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
- $\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}) \leq \sqrt{\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\,\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})}$ Cauchy–Schwarz の不等式の一般化

3　ベクトル空間 Vector space

m 個の 0 でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ をもちいて

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ条件を考える．$\alpha_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ のときは明らかに成り立つ．上式が $\alpha_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ 以外の自明でない解をもつとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形従属（１次従属）linearly dependent であるという．反対に, 上式が成り立つのは $a_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ に限るとき, 線形独立（１次独立）linearly independent であるという．

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立なとき, $a_i \neq 0$ を使って $b_k = -a_k/a_i\,(k = 1, 2, \ldots, m)$ を作って

$$\boldsymbol{a}_i = b_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{i-1} \boldsymbol{a}_{i-1} + b_{i+1} \boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + b_m \boldsymbol{a}_m$$

となる．したがって, あるベクトルの組が線形従属であるということは, その組の中のあるベクトルが他のベクトルの線形結合で表されることを意味している．

3.1　線形部分空間 liner subspace

m 個の線形独立なベクトルの線形結合の集合を

$$W = \left\{ \boldsymbol{b} \,\middle|\, \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{a}_i \right\}$$

と表現する．m 次元ベクトル全体の集合を E^m とする, E^m の部分集合 W が

1. $\boldsymbol{a} \in W, \boldsymbol{b} \in W \rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$
2. $\boldsymbol{a} \in W \rightarrow c\boldsymbol{a} \in W$

を満たすとき, これを m 次元の線形部分空間という．

3.2　基底 basis

任意の線形部分空間 W で線形独立な m 個のベクトルが存在し, $(m+1)$ 個のベクトルは線形従属になるとき W の次元は r であるといい, $\dim W$ と表記する．上記の W に属する線形独立な m 個のベクトルを空間 W の基底という．また, 空間 W は m 個のベクトルによって生成されるという．このことを

$$W = S\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\right) = S\left(\boldsymbol{A}\right)$$

と表す.

重要な定理

> m 次元の部分空間 W に属する m 個の線形独立なベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ とすると, W に属する任意のベクトルは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合としてただ一通りに定まる.

つまり, 線形部分空間の任意のベクトルは, その空間を定める基底を用いて表現可能である.

一般に, 基底の定め方は一通りではない. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が W の基底で全てが直交するとき, 直交基底 orthogonal basis という. さらに, $b_j = a_j / |\boldsymbol{a}_j|$ とすると, $|\boldsymbol{b}_j| = 1$ $(1 \leq j \leq m)$ となる. これを正規直交基底 orthonormal basis という. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots . \boldsymbol{b}_m$ が正規直交基底のとき

$$(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij}$$

である.

3.3 ランク

rank $\boldsymbol{A}$ $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルのうちで線形独立なベクトルの個数は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルのうちで線形独立なベクトルの個数に等しい. この線形独立なベクトルの個数のことを行列 $\boldsymbol{A}$ のランクという.

- $|\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow \text{rank } \boldsymbol{A} < m \qquad (\boldsymbol{A}$は m 次の正方行列)
- $\text{rank } \boldsymbol{A} = \text{rank } \boldsymbol{A}'$
- $\text{rank } (\boldsymbol{AB}) \leq \max(\text{rank } \boldsymbol{A}, \text{rank } \boldsymbol{B})$
- $\text{rank } \boldsymbol{A} = \text{rank } \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right) = \text{rank } \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\right)$

3.4 空間の分割

2 つのベクトルの組 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_q)$ によって生成される部分空間をそれぞれ, $V_A = S(\boldsymbol{A})$, $V_B = S(\boldsymbol{B})$ とするこのとき,

和空間: 2 つの部分空間の和, $V_A + V_B = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \,|\, \boldsymbol{a} \in V_A, \boldsymbol{b} \in V_B\}$ は線形部分空間になる. これを和空間と呼び, 次のように表記する.

$$V_{A \cup B} = V_A + V_B = S(\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B})$$

積空間: 2 つの部分空間の共通部分,

$$V_{A\cap B} = \{\boldsymbol{x}\,|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{B\beta}\}$$

も, 線形部分空間であり, これを積空間と呼ぶ. 次のように表記する.

$$V_{A\cap B} = V_A \cap V_B$$

直和分解: $V_A \cap V_B = \{\mathbf{0}\}$ のとき, 和空間 $V_{A\cup B}$ は V_A と V_B とに直和分解されたと呼び, 次のように表記する. また, V_A と V_B は独立であるともいう.

$$V_{A\cup B} = V_A \oplus V_B$$

補空間: 全空間 E^n が二つの空間 V と W とに直和分解されるとき, W は V の補空間 complementary space といい W^C と表記する.

直交補空間: W に属する任意のベクトルが V に属する任意のベクトルと直交するとき, W は V の直交補空間 orthocoplementary space といい, $W = V^\perp$ と表記する.

$$V^\perp = \{\boldsymbol{a}\,|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = 0,\ \exists\boldsymbol{b} \in V\}$$

全空間 E^n が r 個の独立な空間 W_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ に直和分解されるときは, 次のように書く.

$$E^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

部分空間の次元に関する定理

1. $\dim(V_{A\cup B}) = \mathrm{dim}V_A + \mathrm{dim}V_B - \mathrm{dim}V_{A\cap B}$
2. $\dim(V_A \oplus V_B) = \mathrm{dim}V_A + \mathrm{dim}V_B$
3. $\mathrm{dim}V^C = n - \mathrm{dim}V$

また,

$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ に含まれる任意のベクトル x は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_r \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$$

とただ一通りに分解される.

3.5　線形変換

m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応させることを考え, $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ と表記する. 次の性質をもつ変換 ϕ を線形変換という.

1. $\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x})$.

2. $\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y})$.

任意の m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応させる線形変換 ϕ は m 個の n 次元ベクトルによって構成される $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ をもちいて, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表現される.

3.6　射影行列

$E^n = V \oplus W$ のとき, E^n に含まれる任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \qquad (where,\ \boldsymbol{x}_1 \in V, \boldsymbol{x}_2 \in W)$$

とただ一通りに分解される. このとき, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_1$ に移す変換を W に沿った V への射影 projection という.

基本性質

$\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ を射影行列とすると以下の性質が成り立つ

- べき等性 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ (必要十分条件)
- 対称性 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\right)$
- 直交性 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$
- 相補性 $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$

定理 $\boldsymbol{P}$ が射影行列ならば $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ も射影行列である.

$$\textbf{証明:}\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$$

定理 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$

$$\textbf{証明:}\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$$

4　固有値 Eigen value

たとえば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ として, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどこに写すかを考える.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + y \end{pmatrix}$$

この行列 $\boldsymbol{A}$ は $y = x$ と $y = -x$ という直線の方向については拡大, 縮小しかしない. すなわち

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

そこで任意のベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)'$ をこの 2 つのベクトルに分解して考える.
すなわち, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Ax_1} + \boldsymbol{Ax_2} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x_2}$

1. $\boldsymbol{A}$ には 2 つの比例拡大（縮小）の方向がある
2. $\boldsymbol{A}$ はその 2 つの方向への作用の和として表される

これを一般化すると n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル, $\boldsymbol{\lambda}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有値という.
そこで, 以下の問題を考える

問題 1. 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルと固有値を求める方法を考える

問題 2. 求めた固有ベクトルでベクトル空間の基底が作れるような行列を判別する方法を考える

定理 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は λ の代数方程式 $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ の根である. 逆にこの方程式の根は $\boldsymbol{A}$ の固有値である

証明 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ を $\boldsymbol{A}$ の一つの固有ベクトル, λ_0 を対応する固有値とすると

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Ax} - \lambda_0 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

これは $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ に関する連立一次方程式である. これが $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ をもっているのだから, その係数の行列式は 0 でなければならない.
逆にあるスカラー λ_0 が $\det(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}) = 0$ を満たせば

$$(\boldsymbol{Ax} - \lambda_0 \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

は少なくとも一つの $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ を持つ. そのとき

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_0 \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

だから, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルであり, λ_0 は対応する固有値である.

4.1 固有値の求めかた

$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = 0$ のとき，次の各根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n$ に対して連立方程式 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$ をといて $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ を求めればよい.

例 1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(1-\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(1-\lambda+\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

- $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有値ベクトルは

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x}_1 &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$l + m = 0, \Rightarrow l = -m$$

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意の } 0 \text{ でない数})$$

- $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有値ベクトルは

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x}_2 &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-l + m = 0, \Rightarrow l = m$$

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意の } 0 \text{ でない数})$$

例 2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 (複素数解)

例 3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 (重根)

4.2 固有値の用途

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を対角要素にもつ行列を $\boldsymbol{D}$ とする．この固有値に対応する固有ベクトル $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ を並べてできた行列を $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ とすると

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XD}$$

と表すことができる．また同じことだが $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{D}$ とを用いて

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XDX}^{-1}$$

と表現できる．このとき $\boldsymbol{X}$ の要素である縦ベクトル $\boldsymbol{x}_i(i=1,\ldots,n)$, は全て直交する．すなわち任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n$$

の形に一意的に分解できることを意味する．$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_n$ に各々射影する操作をそれぞれ P_1, P_2, $\cdots$, P_n と書くことにすると

$$\boldsymbol{x}\,(=\boldsymbol{Ix}) = P_1\boldsymbol{x} + P_2\boldsymbol{x} + \cdots + P_n\boldsymbol{x}$$

がすべての $\boldsymbol{x}$ について成立する．写像だけの式にしてみると

$$\boldsymbol{I} = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

が成立する．このようにベクトルに分解しておくと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{Ax}_1 + \boldsymbol{Ax}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_n \\ &= \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n\end{aligned}$$

となる．すなわち $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{x}_i$ 方向には λ_i 倍する引き伸ばし作用をしていることになる．換言すれば $\boldsymbol{A}$ は固有値数だけの引き伸ばし作用の合成によって得られる写像である．射影演算子 P_i を使って表すと

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_1 P_1\boldsymbol{x} + \lambda_2 P_2\boldsymbol{x} + \cdots + \lambda_n P_n\boldsymbol{x}$$

となるので行列だけの関係式にすると

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$$

が成立することになる．$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ が成立するように $\boldsymbol{Ax} = \lambda_1 P_1\boldsymbol{x} + \lambda_2 P_2\boldsymbol{x} + \cdots + \lambda_n P_n\boldsymbol{x}$ の形に分解することを行列 $\boldsymbol{A}$ の射影分解またはスペクトル分解という．P_1, P_2, $\cdots$, P_n はそれぞれ λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n に対する固有空間への射影を表している．この P_i を使うと

$$\boldsymbol{A}^2 = \lambda_1^2 P_1 + \lambda_2^2 P_2 + \cdots + \lambda_n^2 P_n$$

$$5\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = (5\lambda_1 + 1)\,P_1 + (5\lambda_2 + 1)\,P_2 + \cdots + (\lambda_n - 1)\,P_n$$

などのように $\boldsymbol{A}$ の多項式も P_i を使って表現できる．

固有値 λ_i に対する $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体のことを固有値 λ_i に対する固有空間という．

4.3　固有値の性質

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を（重複を許して）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると

1. 固有値の積は行列式である $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 固有値の和は行列のトレースである $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{A}$
3. $\boldsymbol{A}'$ の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
4. $\boldsymbol{A}^k\,(k = 1, 2, \cdots)$ の固有値は $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$
5. $f(n)$ を x の多項式とするとき $f(\boldsymbol{A})$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$

5　行列の微分

d 次元のベクトル，すなわち d 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_d$ をとる関数 $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ を考える．このベクトルに関して $f(\cdot)$ の微分すなわち勾配は

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right) = \mathrm{grad}\ f\left(x\right) = \frac{\partial\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_d} \end{pmatrix} \tag{20}$$

で計算される．

行列 $\boldsymbol{M}$ の要素がスカラ θ の関数であるとき，行列 $\boldsymbol{M}$ を θ で微分すると次の行列を得る．

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_{11}}{\partial \theta} & \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial m_{1d}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial m_{21}}{\partial \theta} & \frac{\partial m_{22}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial m_{2d}}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial m_{n1}}{\partial \theta} & \frac{\partial m_{n2}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial m_{nd}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{21}$$

この行列 $\boldsymbol{M}$ の逆行列 $\boldsymbol{M}^{-1}$ の微分は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{M}^{-1} = -\boldsymbol{M}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \theta} \boldsymbol{M}^{-1} \tag{22}$$

行列 $\boldsymbol{M}$ およびベクトル $\boldsymbol{y}$ が ベクトル $\boldsymbol{x}$ に独立であるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\right] = \boldsymbol{M} \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\boldsymbol{y}^t \boldsymbol{x}\right] = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{y}\right] = \boldsymbol{y} \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}\right] = \left[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^t\right] \boldsymbol{x} \tag{25}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$ が対称行列ならば

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}\right] = 2\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \tag{26}$$

のように簡単になる．

$$\frac{\partial \mathrm{tr}\ \left(\boldsymbol{X}^t \boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}\right)}{\partial \boldsymbol{X}} = \left(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^t\right)\boldsymbol{X} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \ln |\boldsymbol{X}|}{\partial \boldsymbol{X}} = \left(\boldsymbol{X}^t\right)^{-1} \tag{28}$$

$$\frac{\partial \left(\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{y}\right)}{\partial \boldsymbol{M}} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^t \tag{29}$$

$$\frac{\partial \left(\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{M}^t \boldsymbol{y}\right)}{\partial \boldsymbol{M}} = \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{x} \tag{30}$$

6 演習問題

1. 次の行列は何行何列か

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の 3 行 2 列目の要素を答えよ

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & o & \pi \\ \rho & \sigma & \tau & \upsilon \\ \phi & \chi & \psi & \omega \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ はそれぞれ 3 行 2 列,3 行 3 列,2 行 3 列の行列とする．以下のうち行列の積が定義できないものに $\times$, できるものには ◯ をつけよ．

$\boldsymbol{AA}$	$\boldsymbol{AB}$	$\boldsymbol{AC}$	$\boldsymbol{A'A}$	$\boldsymbol{A'B}$	$\boldsymbol{A'C}$
$\boldsymbol{BA}$	$\boldsymbol{BB}$	$\boldsymbol{BC}$	$\boldsymbol{B'A}$	$\boldsymbol{B'B}$	$\boldsymbol{B'C}$
$\boldsymbol{CA}$	$\boldsymbol{CB}$	$\boldsymbol{CC}$	$\boldsymbol{C'A}$	$\boldsymbol{C'B}$	$\boldsymbol{C'C}$
$\boldsymbol{AA'}$	$\boldsymbol{AB'}$	$\boldsymbol{AC'}$	$\boldsymbol{A'A'}$	$\boldsymbol{A'B'}$	$\boldsymbol{A'C'}$
$\boldsymbol{BA'}$	$\boldsymbol{BB'}$	$\boldsymbol{BC'}$	$\boldsymbol{B'A'}$	$\boldsymbol{B'B'}$	$\boldsymbol{B'C'}$
$\boldsymbol{CA'}$	$\boldsymbol{CB'}$	$\boldsymbol{CC'}$	$\boldsymbol{C'A'}$	$\boldsymbol{C'B'}$	$\boldsymbol{C'C'}$

4. 次の計算をせよ.

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 11 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

(d) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}' =$

5. 次の式を満たす x を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算せよ.

(a) $\boldsymbol{A}^3 =$

(b) $\boldsymbol{A}^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} =$

7. $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算せよ.

(a) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$

(b) $\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} =$

(d) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}' =$

(e) $\boldsymbol{Q}' =$

(f) $\boldsymbol{Q}^2 =$

(g) $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} =$

(h) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) =$

(i) $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta} =$

(j) $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} =$

8. $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \\ 1 & a_4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算せよ.

(a) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$

(b) $\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} =$

(d) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}' =$

(e) $\boldsymbol{Q}' =$

(f) $\boldsymbol{Q}^2 =$

(g) $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} =$

(h) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) =$

(i) $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta} =$

(j) $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} =$

9. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする. それぞれのベクトルをグラフに書け.

10. 連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

をグラフを用いて解け.

11. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ によって 次の各点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1)'$ はどこ写されるかグラフに示せ.

(x,y)	(x,y)	(x,y)
(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,0)	(2,1)	(2,2)

12. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

13. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

14. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

15. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

16. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.

17. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.

18. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.

19. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ. さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.

20. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.

21. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示せ．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めせ.