

## 第 4 章のつづき

浅川 伸一

2007 年 01 月 18 日

### 5 多重比較の実際

データ例として向後先生のハンバーガーショップを用いる  
<http://kogolab.jp/elearn/hamburger/chap6/sec3.html>

	わくわく	もぐもぐ	ぱくぱく	
	80	75	80	
	75	70	80	
	80	80	80	
	90	85	90	
	95	90	95	
	80	75	85	
	80	85	95	
	85	80	90	
	85	80	85	
	80	75	90	
	90	80	95	
	80	75	85	
	75	70	98	
	90	85	95	
	85	80	85	
	85	75	85	
	90	80	90	
	90	80	90	
	85	90	85	
	80	80	85	
データ数	20	20	20	60
群平均	84.00	79.50	88.15	83.88
分散	29.0	29.75	28.53	41.57

分散分析表は表 1 のとおり。であるから、ハンバーガーショップによる違

変動要因	変動	自由度	分散	F	p
要因	748.63	2	374.37	12.22	0.0001
誤差	1745.55	57	30.62		
計	2494.19	59			

表 1: 分散分析表

いは有意である。

このデータによれば、(一袋あたりのポテトの本数)はもぐもぐ店が最も少く、次にわくわく店である。そこで帰無仮説  $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  を scheffe の方法によって検討してみる。 $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$  とおくと scheffe の式、左辺は

$$\frac{|c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + c_3 \bar{x}_3|}{\sqrt{\left(\frac{c_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2}{n_2} + \frac{c_3^2}{n_3}\right) \hat{\sigma}_e^2}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\left(\frac{1^2}{20} + \frac{(-1)^2}{20} + \frac{0^2}{20}\right) 30.62}} \quad (21)$$

$$= \frac{|84 - 79.5|}{1.75} \quad (22)$$

$$= 2.571 \quad (23)$$

である。一方右辺は

$$\sqrt{(k-1)F_{k-1, m(k-1)}(\alpha)} = \sqrt{(3-1)F_{2, 3(20-1)}(0.05)} \quad (24)$$

$$= \sqrt{2 \times \text{Finv}(0.05, 2, 57)} \quad (25)$$

$$= 2.51 \quad (26)$$

であるから、右辺の 5% の有意水準の値よりも左辺の方が大きい。したがって、もぐもぐ店とわくわく店には違いがあると言える。

同様の計算をモグモグ店とわくわく店で比較するには  $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$  として計算すれば良い。右辺の値は変わらず、左辺の分母の値も変わらないので左辺分子の値のみ入れ替えて  $|84.0 - 88.15| = 4.15$  であるから右辺は  $4.15/2.571 = 2.37$  となって 5% の有意水準を示す右辺の値 2.51 よりも小さくなる。このことから、モグモグ店とわくわく店の間には有意な差が認められるとは言えないことになる。

同じようにして例えば 5 水準の分散分析について  $\bar{x}_1$  と  $\bar{x}_3$  についてだけ検討したければ、 $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 0, c_5 = 0$  と置いて計算すれば良い。条件 1 と条件 2 が等しく、それらは条件 3 と条件 4 とは異なるという仮説を検討したければ  $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = -1, c_5 = 0$  と置いて計算すれば良い。

## 6 一因子の実験計画の復習

線形モデルによる実験計画とは以下のようにまとめられた。以下のデータに対して、

条件 1	条件 2	...	条件 k	
$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$	
$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$	
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	
$x_{n_11}$	$x_{n_22}$	...	$x_{n_kk}$	
$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	...	$\bar{x}_{.k}$	$\bar{x}_{..}$

表 2: 1 要因 k 水準の実験データ

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n_11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n_22} \\ \vdots \\ x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{n_kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \vdots \\ \epsilon_{n_11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \\ \vdots \\ \epsilon_{n_22} \\ \vdots \\ \epsilon_{1k} \\ \epsilon_{2k} \\ \vdots \\ \epsilon_{n_kk} \end{pmatrix} \quad (27)$$

これをデータベクトル  $x$ , 計画行列  $A = [A_0, A_1]$ , 平均ベクトル  $\theta$ , および誤差ベクトル  $\epsilon$  を用いて

$$x = A\theta + \epsilon \quad (28)$$

と書くことができた。このとき計画行列のランクは  $\text{rann}A = k$  なので

$$A^T A = \begin{pmatrix} N & n_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ n_1 & n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ n_k & 0 & 0 & \cdots & n_k \end{pmatrix} \quad (29)$$

の逆行列は存在しない。

一つの解法としては  $A_0$  で張られる空間の補空間を考えてその上で直交補空間への分割を考えれば良い。

すなわち、データ行列を一つの列ベクトル  $\boldsymbol{x} = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n_1 1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n_2 2}, \dots, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{n_k k})^T$  で表現し、全ての要素が 1 からなる  $(1, 1, \dots, 1)^T \theta_0$  列ベクトルで張られる空間への射影行列を用いて射影し、その直交補空間への射影行列

$$I - Q_0 = I - A_0 (A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \quad (30)$$

を用いて射影し、その射影されたベクトルをさらに直和分解すれば良かった。ここで  $I$  は単位行列を表す。

## 7 2 要因の場合

測定すべき実験変数が複数の場合を考える。

### 7.1 繰り返しのない場合

各条件で一度しか測定が行われない場合である。表 3 では列方向に条件 A

	条件 A1	条件 A2	条件 A3	
条件 B1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$\bar{x}_{1.}$
条件 B2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$\bar{x}_{2.}$
条件 B3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$\bar{x}_{3.}$
条件 B4	$x_{41}$	$x_{42}$	$x_{43}$	$\bar{x}_{4.}$
	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.3}$	$\bar{x}_{..}$

表 3: 2 元配置の分散分析に用いられるデータ

(3 水準)、行方向に条件 B (4 水準) が表現されている。実際には各条件毎に一つしかデータが得られないことは稀である。しかし、例えば、条件 B を繰り返しの順序と考えれば実験の最初に得られた条件 B1 と最後に得られた







要因	平方和	自由度	平均平方	F
A	$S_1$	$m-1$	$S_1/(m-1)$	$\frac{S_1/(m-1)}{S_e/(m-1)(k-1)}$
B	$S_2$	$k-1$	$S_2/(k-1)$	$\frac{S_2/(k-1)}{S_e/(m-1)(k-1)}$
誤差	$S_e$	$(m-1)(k-1)$	$S_e/(m-1)(k-1)$	
計	$x^T x$	$mk-1$		

表 4: 繰り返しのない 2 要因の分散分析表

じょうにしてベクトルの長さ  $x^T x$  を分解することができる。

$$x^T x = x^T Q_0 x + x^T Q_1 x + x^T Q_2 x + x^T Q_e x \quad (46)$$

$$= x^T Q_0 x + x^T Q_1 x + x^T Q_2 x + x^T (I - Q) x \quad (47)$$

$$= S_0 + S_1 + S_2 + S_e \quad (48)$$

## 7.2 繰り返しのある 2 要因の分散分析

表 3 のように、各条件あたりのデータが 1 つしかない場合を複数個のデータを持つことができるように拡張する。分析に用いられるデータは次の表 5 のようになる。

	条件 A1	条件 A2	条件 A3	
条件 B1	$x_{111}$	$x_{121}$	$x_{131}$	$\bar{x}_{1..}$
	$x_{112}$	$x_{122}$	$x_{132}$	
条件 B2	$x_{211}$	$x_{221}$	$x_{231}$	$\bar{x}_{2..}$
	$x_{212}$	$x_{222}$	$x_{232}$	
	$\bar{x}_{.1.}$	$\bar{x}_{.2.}$	$\bar{x}_{.3.}$	$\bar{x}_{...}$

表 5: 繰り返しのある 2 元配置の分散分析に用いられるデータ

対応する線形モデルは

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\gamma)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (49)$$





## 8 交互作用

2 要因以上の実験計画で繰り返しが存在する場合には、各条件毎に分散を求めることができる。このとき、各個の条件毎に差が存在する場合がある。

むしろ、積極的に交互作用の効果を検討するような実験が立案されることも多い。

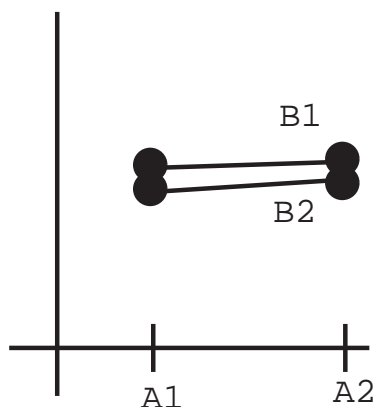


図 2: いずれの効果も認められない例

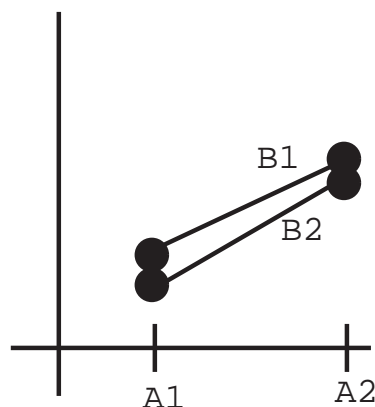


図 3: 要因 A の効果が認められる例

図 2 は横軸に条件 (要因) A (2 水準) をとり、条件 (要因) B (同じく 2 水準) を異なる線として表現したものである。この図 2 の場合は条件 A にも条件 B にも差異が認められず、すべてのデータが全平均の近くに集まっている。

一方、図 3 では要因 B の効果が認められず (B1, B2 間で差がない) 要因 A の効果のみが有意であるような場合である。

図 4 は反対に要因 B の効果は有意であるが、要因 A では A1 と A2 との間に差が認められない場合である。

図 5 は交互作用が有意となった場合である。条件毎に要因 A の効果と要因 B の効果の現れ方が異なる。

図 6 は A1 と A2 との間にも、B1 と B2 との間にも共に有意な差が認められる場合の例である。

図 7 は A1 と A2 との間に有意な差が認められ、かつ交互作用も存在するが要因 B の効果は認められない例である。あるいは A1 と A2 との差が有意となったのは、B2 条件のみであったということもできる。

図 8 は B1 と B2 との間に有意な差が認められ、かつ交互作用も存在するが要因 A の効果は認められない例である。これは B1 と B2 との差が認められたのは A2 条件においてのみであったと解釈することもできる。

図 9 左は横軸に二人の意味記憶に障害を持つ患者の語彙判断課題の成績を示している (Bullinaria, 1999)。患者 A は課題 1, 課題 2 の成績とも良好であり、患者 B は相対的に成績が落ちている。

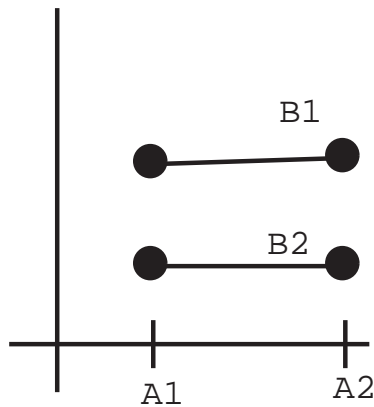


図 4: 要因 B の効果が認められる例

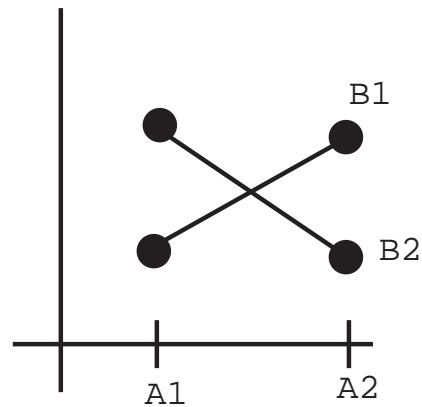


図 5: A と B の交互作用効果が認められる例

同じデータを書き直したものが図 9 右である。横軸を課題とし患者の違いを異なる線として表現している。

このように同じデータであっても作図の仕方によって印象が異なる。

## 9 さらに複雑な実験計画

3 要因以上の実験計画であっても基本的な考え方は変わらない。どれか一つの要因について繰り返しがなければ、繰り返しのない 2 要因の分散分析と同じく交互作用の検討をすることができない。最も一般的な形で 3 要因の実験計画を表現すると

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + (\gamma\alpha)_{ki} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \quad (53)$$

となる。ここで  $(\alpha\beta)_{ij}$ ,  $(\beta\gamma)_{jk}$ ,  $(\gamma\alpha)_{ki}$  は 2 次の交互作用を表し、 $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$  は 3 次の交合作用を表す。データの性質や実験の目的によってはいくつかの交互作用を無視して考えることも行われる。

エクセルの統計ツールで用意されているのは 2 元配置 (2 要因) の分散分析までであるが、どんな複雑な実験計画でも計画行列を作り、射影行列による直和分解を用いれば原理的には計算可能である。

SAS, SPSS などの統計パッケージソフトウェアでは GLM(一般線形モデル: generalized linear model) などの名前で利用可能である。

つまり、すべての実験計画の基本的なアイデアはすべて同じであり、計画行列を如何に作るかによってデータの解釈が異なってくる。計画行列を元に

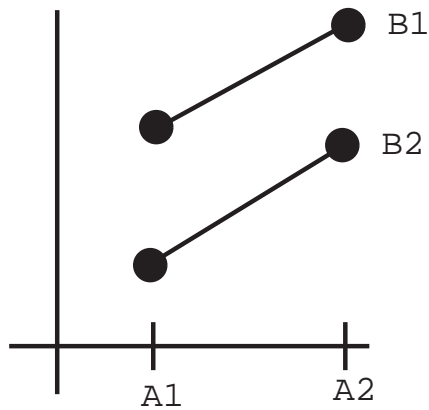


図 6: 2 つの要因の主効果が共に有意であると考えられる例

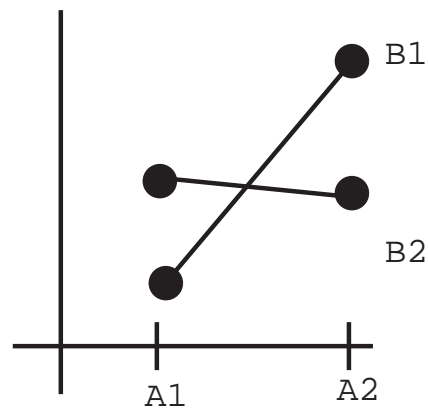


図 7: 要因 A の主効果と交互作用が認められる例

データを直和分解して、その部分空間内での線分の長さに対応する量を考えれば良い。

また、一般に検討すべき要因が増えれば増えるほど手続きは煩雑になり、結果の解釈も難しくなる。高次交互作用の解釈も難しい。

そこで、主効果 (2 次の交互作用も加えることがある) のみを検討する方法が開発されている。

### 9.1 一部実施と直交計画表

例えば A, B, C, D という 4 つの要因があり、すべて 2 水準であるとする。交互作用については AB についてだけ考慮したいが、それ以外の交互作用については理論的に無視できるものと考えよう。すべての実験条件について  $2^4 = 16$  条件あるが、この一部だけを実施するものとし、以下の表 9.1 のうち  $x_i$  の条件だけ実施する。

A の主効果を  $\alpha_1, \alpha_2$ , B, C, D の主効果をそれぞれ  $\beta, \gamma, \delta$  で表すものとする。A と B との交互作用については  $\tau$  とする。

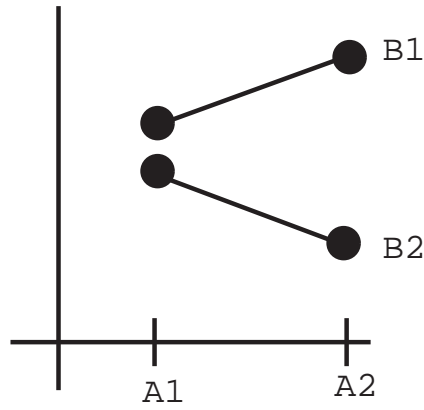


図 8: B の主効果と交互作用が認められる例

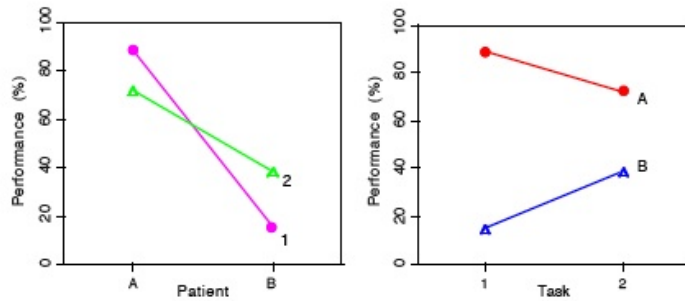


Figure 2: A weak double dissociation for Tasks 1 & 2, Patients A & B.

図 9: Bullinaria(1999), Figure 2

線形モデルを用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \\ \epsilon_8 \end{pmatrix} \quad (54)$$

計画行列のうち 2 列目が A, 3 列目が B, 4 列目が C, 5 列目が D, 6 列目が

	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	$x_1$
2	1	1	1	2	
3	1	1	2	1	
4	1	1	2	2	$x_2$
5	1	2	1	1	
6	1	2	1	2	$x_3$
7	1	2	2	1	$x_4$
8	1	2	2	2	
9	2	1	1	1	
10	2	1	1	2	$x_5$
11	2	1	2	1	$x_6$
12	2	1	2	2	
13	2	2	1	1	$x_7$
14	2	2	1	2	
15	2	2	2	1	$x_8$
16	2	2	2	2	

A と B との交互作用を表している。これを

$$x = A\theta + \epsilon \quad (55)$$

として解くことを考える。

計画行列  $A$  の列ベクトルは直交していることは

$$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (56)$$

となることから確認できる。 $A^T x$  を計算すると

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 - x_8 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8 \end{pmatrix} \quad (57)$$

各要素がそれぞれ全平均、A の効果、B の効果、C の効果、D の効果、A と B との交互作用の効果に成っている。 $(A^T A)^{-1}$  は対角要素が  $1/8$  で非対角

要素が全て 0 である (直交している)ので単純な行列になっているので計算が極端に簡単となる。

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x} \quad (58)$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_4 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_5 \mathbf{x} \quad (59)$$

$$= S_0^2 + S_\alpha + S_\beta^2 + S_\gamma^2 + S_\delta^2 + S_\tau^2 + S_e^2 \quad (60)$$

従って次の分散分析表 7 を得る。

要因	平方和	自由度	
A	$S_\alpha$	1	$S_\alpha/S_e$
B	$S_\beta$	1	$S_\beta/S_e$
C	$S_\gamma$	1	$S_\gamma/S_e$
D	$S_\delta$	1	$S_\delta/S_e$
AB	$S_\tau$	1	$S_\tau/S_e$
誤差	$S_e$	1	

表 7: 分散分析表

この例からわかるとおり計画行列が直交している場合には多数の因子を少い測定で得ることができる。この直交表にそれぞれの因子 (主効果) および交互作用を割り当てればよい。例えば 3 要因の実験計画で全ての交互作用を考慮しなければならないとすれば主効果 3 つ (A, B, C) 2 次の交互作用 3 つ (AB, BC, CA) 3 次の交互作用 1 つ (ABC) を含む実験に対して次の表 8 を直交計画表という。直交計画表の全ての列は互いに直交することが本質的

データ	$\mu$	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
$x_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$x_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$x_4$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$x_5$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$x_6$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$x_7$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$x_8$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
(54)A の列	1	2	3	6	4			5
上の例での要因	$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\tau$	$\delta$	e	e	$\gamma$

表 8: 直交計画表  $L_u(2^7)$

な点である。交互作用 AB の列の各要素は A と B との列の対応する要素同士の積になっている。

直交行列の 1 列を水準 A と考えることを直交行列に因子（あるいは水準）A を割り付けると言う。直交行列には  $L_{16}(2^{15})$  などいくつか考案されている。考え方は全て同じである。