線形代数

浅川伸一

2005 年 5 月 16 日

1 Vector

いくつかの数値をまとめて表現する方法である. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ これに対して, 普通の意味での数値をスカラ scalor という.

- 行ベクトル raw vector. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
- 列ベクトル column vector. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
- ノルム norm. $|a| = \sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}} = \sum_i a_i^2$
- ベクトルの内積 inner product. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$$\cos\theta = \frac{(a \cdot b)}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

  1. $|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})$
  2. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  3. $(\alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  4. $|\boldsymbol{a}|^2 = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

- 2 ベクトル間の距離.

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$$

  と定義すれば,

  1. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0$
  2. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
  3. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$
  4. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \geq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

- Cauchy–Schwarz の不等式.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 &\leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \\
\left(\sum a_i b_i\right)^2 &\leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)
\end{aligned}
$$

証明 任意の実数 t に対して

$$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + t^2|\boldsymbol{b}|^2 \geq 0$$

が常に成立するためには，判別式 D が負であればよい．従って

$$D = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \leq 0$$

- ベクトルの外積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\sin\theta$

2 Matrix

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$

- 正方行列.
- 零行列. $\boldsymbol{0}$
- 転置行列. $\boldsymbol{A}' = (a_{ji})$
  - $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$
- 対称行列. $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$
- 対角行列. $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$
- 単位行列. $\boldsymbol{I} = (\delta_{ij})$

  δ はクロネッカー kronecker のデルタとよばれ

  $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i\neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

  である.
- 四則演算.
  - $\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda$
  - $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

- $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$
- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
- $\boldsymbol{A}_{nm}\boldsymbol{B}_{ml} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)$
- 一般に $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
- $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
- $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$

• 逆行列. $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$

- $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$
- $\left(\boldsymbol{A}'\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'$
- $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$

次の逆行列を求めよ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• 直交行列. $\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}^{-1}$

• トレース Trace. $\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- $\operatorname{tr}\,(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{B}) = c\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{A}) + d\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{B})$
- $\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}\,(\boldsymbol{BA})$
- $\operatorname{tr}\,\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$
- $\operatorname{tr}\,\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}' = m$ 　(ただし $\boldsymbol{A}$ は $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = m$ の $n \times m$ 行列)
- $\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}\,(\boldsymbol{BA})$
- $\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
- $\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}) \leq \sqrt{\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})}$ Cauchy–Schwarz の不等式の一般化

• 行列式.（正則行列） $\det(\boldsymbol{A})$

– 2 次の正方行列の行列式は $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすれば, $a_1b_2 - a_2b_1$ であり, この 2 本のベクトルによって作られる平行四辺形の面積に等しい.

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \sin\theta \\ = \ & |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ = \ & \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2 \left\{ \frac{|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2} \right\}} \\ = \ & \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \\ = \ & \sqrt{a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2} \\ = \ & \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\ = \ & a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

– 対角行列, 三角行列の行列式はすべての対角成分の積に等しい. $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

– $\boldsymbol{A}$ の任意の 2 列（行）を入れ換えると $|\boldsymbol{A}|$ の符号が変わる

– $|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}A_{ij}$

> 行列 $\boldsymbol{A}$ の i 行 j 列を除いて得られる $m-1$ 行 $m-i$ 列の小行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを a_{ij} の**余因子** cofactor といい, A_{ij} と書く

– $|c\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = (A_{ji}/\,|\boldsymbol{A}|)$

– $|c\boldsymbol{A}| = c^m\,|\boldsymbol{A}| \qquad (\boldsymbol{A}$ は m 次の正方行列$)$

– $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$

– $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|$

– $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$

– $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

3 Vector space

m 個の 0 でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ をもちいて

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ条件を考える. $\alpha_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ のときは明らかに成り立つ. 上式が $\alpha_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ 以外の自明でない解をもつとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形従属（1 次従属）linearly dependent であるという. 反対に, 上式が成り立つのは $a_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ に限るとき, 線形独立（1 次独立）linearly independent であるという.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立なとき, $a_i \neq 0$ を使って $b_k = -a_k/a_i\,(k = 1, 2, \ldots, m)$ を作って

$$\boldsymbol{a}_i = b_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + b_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{a}_m$$

となる. したがって, あるベクトルの組が線形従属であるということは, その組の中のあるベクトルが他のベクトルの線形結合で表されることを意味している.

3.1 線形部分空間 liner subspace

m 個の線形独立なベクトルの線形結合の集合を

$$W=\left\{\boldsymbol{b}\,\middle|\,\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{a}_i\right\}$$

と表現する. m 次元ベクトル全体の集合を E^m とする, E^m の部分集合 W が

1. $\boldsymbol{a}\in W,\boldsymbol{b}\in W\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$
2. $\boldsymbol{a}\in W\to c\boldsymbol{a}\in W$

を満たすとき, これを m 次元の線形部分空間という.

3.2 基底 basis

任意の線形部分空間 W で線形独立な m 個のベクトルが存在し, $(m+1)$ 個のベクトルは線形従属になるとき W の次元は r であるといい, $\dim W$ と表記する. 上記の W に属する線形独立な m 個のベクトルを空間 W の基底 という. また, 空間 W は m 個のベクトルによって生成されるという. このことを

$$W=S\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\right)=S\left(\boldsymbol{A}\right)$$

と表す.

重要な定理

m 次元の部分空間 W に属する m 個の線形独立なベクトルを $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ とすると, W に属する任意のベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ の線形結合としてただ一通りに定まる.

つまり, 線形部分空間の任意のベクトルは, その空間を定める基底を用いて表現可能である.

一般に, 基底の定め方は一通りではない. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ が W の基底で全てが直交するとき, 直交基底 orthogonal basis という. さらに, $b_j=a_j/\left|\boldsymbol{a}_j\right|$ とすると, $|\boldsymbol{b}_j|=1$ $(1\le j\le m)$ となる. これを正規直交基底 orthonormal basis という. $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots.\boldsymbol{b}_m$ が正規直交基底のとき

$$(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j)=\delta_{ij}$$

である.

3.3 ランク

rank $\boldsymbol{A}$ $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルのうちで線形独立なベクトルの個数は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルのうちで線形独立なベクトルの個数に等しい. この線形独立なベクトルの個数のことを行列 $\boldsymbol{A}$ のランクという.

- $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}<m$ 　　($\boldsymbol{A}$は m 次の正方行列)
- $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}'$
- $\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{AB})\le\max\left(\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A},\mathrm{rank}\ \boldsymbol{B}\right)$
- $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{rank}\ \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\right)$

3.4 空間の分割

2 つのベクトルの組 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_q)$ によって生成される部分空間をそれぞれ, $V_A = S(\boldsymbol{A})$, $V_B = S(\boldsymbol{B})$ とするこのとき,

和空間: 2 つの部分空間の和, $V_A + V_B = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \,|\, \boldsymbol{a} \in V_A, \boldsymbol{b} \in V_B\}$ は線形部分空間になる. これを和空間と呼び, 次のように表記する.

$$V_{A \cup B} = V_A + V_B = S(\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B})$$

積空間: 2 つの部分空間の共通部分,

$$V_{A \cap B} = \{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}\}$$

も, 線形部分空間であり, これを積空間と呼ぶ. 次のように表記する.

$$V_{A \cap B} = V_A \cap V_B$$

直和分解: $V_A \cap V_B = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき, 和空間 $V_{A \cup B}$ は V_A と V_B とに直和分解されたと呼び, 次のように表記する. また, V_A と V_B は独立であるともいう.

$$V_{A \cup B} = V_A \oplus V_B$$

補空間: 全空間 E^n が二つの空間 V と W とに直和分解されるとき, W は V の補空間 complementary space といい W^C と表記する.

直交補空間: W に属する任意のベクトルが V に属する任意のベクトルと直交するとき, W は V の直交補空間 orthocoplementary space といい, $W = V^{\perp}$ と表記する.

$$V^{\perp} = \{\boldsymbol{a} \,|\, (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = 0,\ \exists \boldsymbol{b} \in V\}$$

全空間 E^n が r 個の独立な空間 W_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ に直和分解されるときは, 次のように書く.

$$E^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

部分空間の次元に関する定理

1. $\dim(V_{A \cup B}) = \mathrm{dim}V_A + \mathrm{dim}V_B - \mathrm{dim}V_{A \cap B}$
2. $\dim(V_A \oplus V_B) = \mathrm{dim}V_A + \mathrm{dim}V_B$
3. $\mathrm{dim}V^C = n - \mathrm{dim}V$

また,

$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ に含まれる任意のベクトル x は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_r \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$$

とただ一通りに分解される.

3.5 線形変換

m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応させることを考え, $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ と表記する. 次の性質をもつ変換 ϕ を線形変換という.

1. $\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x})$.
2. $\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y})$.

任意の m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応させる線形変換 ϕ は m 個の n 次元ベクトルによって構成される $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ をもちいて, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表現される.

3.6 射影行列

$E^n = V \oplus W$ のとき, E^n に含まれる任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \qquad (where,\ \boldsymbol{x}_1 \in V, \boldsymbol{x}_2 \in W)$$

とただ一通りに分解される. このとき, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_1$ に移す変換を W に沿った V への射影 projection という.

基本性質

$\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ を射影行列とすると以下の性質が成り立つ

- べき等性 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ (必要十分条件)
- 対称性 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{y} = \big(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\big)$
- 直交性 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$
- 相補性 $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$

定理 $\boldsymbol{P}$ が射影行列ならば $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ も射影行列である.

証明:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q} &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) \\ &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \\ &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

定理 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$

証明:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) \\ &= \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

4 eigen value

たとえば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ として, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどこに写すかを考える.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + y \end{pmatrix}$$

この行列 $\boldsymbol{A}$ は $y=x$ と $y=-x$ という直線の方向については拡大, 縮小しかしない. すなわち

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

そこで任意のベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y)'$ をこの 2 つのベクトルに分解して考える. すなわち, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Ax_1}+\boldsymbol{Ax_2}=\frac{3}{2}\boldsymbol{x_1}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x_2}$

1. $\boldsymbol{A}$ には 2 つの比例拡大（縮小）の方向がある
2. $\boldsymbol{A}$ はその 2 つの方向への作用の和として表される

これを一般化すると n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル, $\boldsymbol{\lambda}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有値という.

そこで, 以下の問題を考える

問題 1. 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルと固有値を求める方法を考える

問題 2. 求めた固有ベクトルでベクトル空間の基底が作れるような行列を判別する方法を考える

定理 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は λ の代数方程式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ の根である. 逆にこの方程式の根は $\boldsymbol{A}$ の固有値である

証明 $\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$ を $\boldsymbol{A}$ の一つの固有ベクトル, λ_0 を対応する固有値とすると

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda_0\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Ax}-\lambda_0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

これは $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ に関する連立一次方程式である. これが $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ をもっているのだから, その係数の行列式は 0 でなければならない. 逆にあるスカラー λ_0 が $\det(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})=0$ を満たせば

$$(\boldsymbol{Ax}-\lambda_0\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

は少なくとも一つの $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ を持つ. そのとき

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda_0\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$$

だから, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルであり, λ_0 は対応する固有値である.

4.1 固有値の求めかた

$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ のとき, 次の各根 λ_1, λ_2,$\cdots$,λ_n に対して連立方程式 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ をといて $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{x}_n$ を求めればよい.

例 1 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(1-\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(1-\lambda+\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

- $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有値ベクトルは

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{x}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$l + m = 0, \Rightarrow l = -m$

$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 　　(c は任意の 0 でない数)

- $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有値ベクトルは

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{x}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$-l + m = 0, \Rightarrow l = m$

$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　　(c は任意の 0 でない数)

例 2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 (複素数解)

例 3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 (重根)

例 4 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有値 (重根)

4.2　固有値の用途

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を対角要素にもつ行列を $\boldsymbol{D}$ とする．この固有値に対応する固有ベクトル $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を並べてできた行列を $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ とすると

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XD}$$

$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{D}$ とを用いて

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XDX}^{-1}$$

と表現できる．

4.3　固有値の性質

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を（重複を許して）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると

1. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = \det(\boldsymbol{A})$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{A}$
3. $\boldsymbol{A}'$ の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
4. $\boldsymbol{A}^k\ (k = 1, 2, \cdots)$ の固有値は $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$
5. $f(n)$ を x の多項式とするとき $f(\boldsymbol{A})$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$

5 演習問題

1. 次の行列は何行何列か

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の 3 行 2 列目の要素を答えよ

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & o & \pi \\ \rho & \sigma & \tau & \upsilon \\ \phi & \chi & \psi & \omega \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ はそれぞれ 3 行 2 列,3 行 3 列,2 行 3 列の行列とする．以下のうち行列の積が定義できないものに ×, できるものには ◯ をつけなさい

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{AA} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{AC} & \boldsymbol{A'A} & \boldsymbol{A'B} & \boldsymbol{A'C} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{BB} & \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B'A} & \boldsymbol{B'B} & \boldsymbol{B'C} \\ \boldsymbol{CA} & \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{CC} & \boldsymbol{C'A} & \boldsymbol{C'B} & \boldsymbol{C'C} \\ \boldsymbol{AA'} & \boldsymbol{AB'} & \boldsymbol{AC'} & \boldsymbol{A'A'} & \boldsymbol{A'B'} & \boldsymbol{A'C'} \\ \boldsymbol{BA'} & \boldsymbol{BB'} & \boldsymbol{BC'} & \boldsymbol{B'A'} & \boldsymbol{B'B'} & \boldsymbol{B'C'} \\ \boldsymbol{CA'} & \boldsymbol{CB'} & \boldsymbol{CC'} & \boldsymbol{C'A'} & \boldsymbol{C'B'} & \boldsymbol{C'C'} \end{array}$$

4. 次の計算をしなさい

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 11 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

(d) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}' =$

5. 次の式を満たす x を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算しなさい.

(a) $\boldsymbol{A}^3 =$

(b) $\boldsymbol{A}^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} =$

7. $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算しなさい.

(a) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$

(b) $\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} =$

(d) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}' =$

(e) $\boldsymbol{Q}' =$

(f) $\boldsymbol{Q}^2 =$

(g) $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} =$

(h) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) =$

(i) $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta} =$

(j) $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} =$

8. $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \\ 1 & a_4 \end{pmatrix}$ としたとき次の行列を計算しなさい.

(a) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} =$

(b) $\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} =$

(c) $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} =$

(d) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}' =$

(e) $\boldsymbol{Q}' =$

(f) $\boldsymbol{Q}^2 =$

(g) $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} =$

(h) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) =$

(i) $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}=$

(j) $\boldsymbol{y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right)\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{y}=$

9. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ とする．それぞれのベクトルを下のグラフに書き込みなさい.

10. 連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

をグラフを用いて解け.

11. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ によって 次の各点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_1)'$ はどこ写されるか下のグラフに示しなさい.

(x,y)	(x,y)	(x,y)
(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,0)	(2,1)	(2,2)

12. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

13. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

14. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

15. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

16. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

17. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

18. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

19. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

20. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.

21. 次の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ はどこ写されるかベクトル $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ をグラフに示しなさい．さらに $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい.