生物学特論A
(分類系統学II)
第11回

人口動態論

日本では少子化が社会問題となっている。そこで，今日は人口学 demography の問題を考えてみたい。人口の増加，あるいは個体数の増加と齢構成の関係はどうなっているのか。 それが人口学である。

人口の行列モデル

それぞれの年齢における死亡率と出産率が与えられたとき， 人口の増加，もしくは減少が予測できるでしょうか。 ある年 t において年齢 x の雌個体の数を $n_{x,t}$ とします。 x 歳での生存率を p_x とおけば $x+1$ 歳のときの個体数は

$$n_{x+1,t+1} = p_x n_{x,t} \qquad x = 0,1,\cdots,w-1 \qquad (1)$$

と書ける。

また x 歳の雌の出産率を m_x で表わすことにすると，次の年 $t+1$ での新生児の個体数 $n_{0,t+1}$は

次のように表わされる。

$$n_{0,t+1} = m_0 n_{0,t} + m_1 n_{1,t} + m_2 n_{2,t} + \cdots + m_w n_{w,t} = \sum_{i=0}^{w} m_i n_{i,t} \qquad (2)$$

0 歳での出産率 m_0 を考えるのは奇妙な気がするかも知れないが，一年性の草木や昆虫などのことも考えているので問題になる。人間の場合には当然 0 歳での出産率は 0 であるから$m_0=0$である。人口学では雄の存在や役割は問題にしないことになっている。したがって雄である私は人口問題に関して何かをいえる立場にない(; _ ;)。ここで次の行列を考えてみる

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{w-1} & m_w \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{w-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

これは1行目にそれぞれの年齢での出産率，2行目以降の対角行列に生存率をおいた行列である。ある年 t における雌の個体数を要素とする

$$\mathbf{n}_{t+1} = (n_{0,t}, n_{1,t}, n_{2,t}, \cdots, n_{w,t})' \tag{4}$$

縦ベクトルとすると(1), (2) は

$$\mathbf{n}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{n}_t \tag{4}$$

と書ける。ある年の雌の人口を n_0 とし，繰り返しこの行列を適用することで x 年後の人口構成は， と行列を x 回掛け合わせた，行列の累乗の形で表現できる。

$$\mathbf{n}_x = \mathbf{M}^x \mathbf{n}_0 \tag{5}$$

この式の安定性は行列の固有値と固有ベクトルによって表わされる。実際，数値計算の分野では，行列の固有値を求めるときに冪乗法といって行列を繰り返しかけ合わせることで固有ベクトルを求める方法が知られている。

安定年齢分布と指数増殖

従って，(4) を繰り返し用いて計算する場合，十分大きな t に対して，その年齢を持つ雌の個体比率が一定の値となり，年齢分布の形が収束することになる。

$n_t = u$ とおくと，次の年にはベクトルの方向はそのままで，長さだけが λ 倍になるので

$n_{t+1} = \lambda u$ とおける。すると (4) は

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{u} \tag{6}$$

λ の満たすべき方程式は，

$$1 = \sum_{x=0}^{w} \lambda^{-x-1} l_x m_x \tag{7}$$

となる。ここで

$$l_x = p_0 p_1 \cdots p_{x-1} = \prod_{i=0}^{x-1} p_i \tag{8}$$

は，生まれた子どもが x 歳まで生存できる割合である。

(4)を満たすベクトル $u = (n_0, n_1, \ldots, n_w)^T$ を決めると，その要素は

$$n_x \propto l_x \lambda^{-x} \qquad (9)$$

となる。すなわち固有ベクトルの性質から，u は，方向だけに意味があるのであり，定数倍の自由度が残っている。この収束先の年齢分布は安定齢分布と呼ばれる。(4)から，1 年当たりの増加率が固有値 λ であり，行列 M はフロベニウスの定理から，複素数まで数えると w +1 個の根があることになる。正の実数解はそれらの中で最大の絶対値を持つ。

実習

適当な行列 M を作って上記のことを確かめてみよう。matprd というプログラムは行列の積を計算してくれる。エディタなどで n 次の正方行列，M を作り

./matprd M M > M2

などとすれば M^2 が M2 というファイルに格納される。

./matprd M2 M > M3

とすれば M^3 が M3 というファイルに作られる。

以下同様にして M10 くらいまで作って，適当な n 行 1 列の行列 u を作って

./matprd M10 u

として人口の動態を観察してみよう。この場合 u の 10 年後の人口動態（各年齢の人口分布）が観察されることになる。

行列 M の固有値は simple-eigen というプログラムで求めることができる。

./simple-eigen -p 1 M

とすれば，行列 M の最大固有値 1 つと対応する固有ベクトルが表示される。最大固有値 λ が 1 以上であれば，

./matprd M10 u

の結果は増大しているはずである。なお u がどんな値であっても，固有ベクトルの方向に近づくので，初期値 u はどんな値であっても良い。

たとえば，すべての要素が 1 である $u = (1, 1, \ldots, 1)^T$ であっても，一定の比率（固有ベクトルの方向）に収束するはずである。このことを確かめてみよ。

たとえば，生存率 m が一定で $m_0 = m_1 = \ldots = m_8 = m = 0.96$ で 0 代から 80 代までの出産率を m=2 のポアソン分布に従うとしてみると，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 \\ 0.135 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.271 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.271 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.180 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.090 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.036 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.012 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.003 & 0.000 \end{pmatrix} \quad (10)$$

としてみる。M の最大固有値は λ=1.11292 であるので増加するはずである。matprd によって M^{10} を作り $u = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ を右からかけてみると

$$\mathbf{M}^{10}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 21.46959 \\ 2.60426 \\ 0.63444 \\ 0.15428 \\ 0.02492 \\ 0.00193 \\ 0.00009 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \end{pmatrix} \quad (11)$$

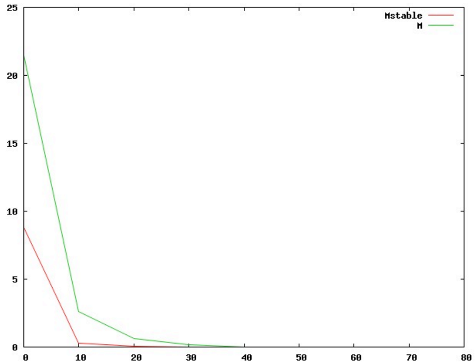
と 0 から 10 代までの人口だけで 21 であり， 20 代までをあわせると最初の人口 $\sum_{i=0}^{8} 1 = 9$ の倍以上になっている。一方のこの M の出産率を少し下げて

$$\mathbf{M}_{\text{stable}} = \begin{pmatrix} 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 & 0.960 \\ 0.035 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.175 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.130 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.080 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.090 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.036 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.012 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.003 & 0.000 \end{pmatrix} \quad (12)$$

としてみると M の最大固有値は λ_{max}=1.0003 とほぼ 1 なので人口は安定しているはずである。実際， matprd によって M^{10} を作って $M^{10}u$ を求めてみると，

$$\mathbf{M}^{10}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8.83224 \\ 0.30904 \\ 0.05410 \\ 0.00702 \\ 0.00056 \\ 0.00009 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \end{pmatrix} \quad (13)$$

となって，すべてを足し合わせてもほぼ 9 で安定していることが分かる。両者を比較してみるためにグラフ化してみると

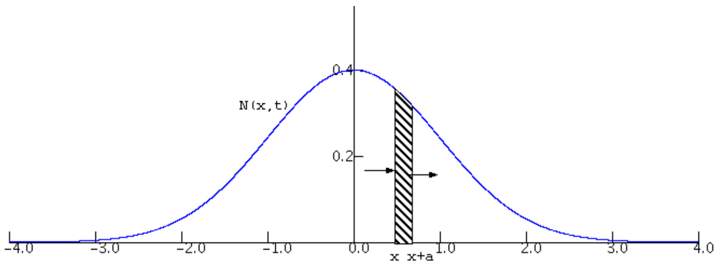


2つの行列による人口構成の変化

固有値 λ が 1 を超えている M においては出産率が高いために 0-10 代の人口がかなり増大していることが分かる。

人口構成の連続モデル

人口やサイズなどは実際には連続量となります。ある年齢 x の時刻 t における分布は $n(x, t)$ という分布関数によって表わされる。



人口 x が a と b との間にある個体数は

$$\int_a^b n(x,t)\,dx \qquad (14)$$

という積分に等しいと仮定する。

ここで $J(x,t)$ という関数を考える。これは x が増加する方向，図では右方向への流れの量を表しているものとする。

すなわち，単位時間あたりに特性値 x がより小さい値から大きい値へと変わった個体数と，逆方向へ変化した個体数との差を表わす。そうすると $n(x,t)$ の時間変化は

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(n,t)}{\partial x} \qquad (15)$$

という偏微分方程式で表わされる。

$\partial n(x,t)/\partial t$ は 2 変数関数 $n(x,t)$ の t についての偏微分と呼ばれる。

もう一方の変数 x を定数のようにみなして t についてだけ微分したものである。

特性値 x が，区間 $[x, x+a]$ にある個体数は

$$\int_x^{x+a} n(y,t)\,dy \qquad (16)$$

と表わされる。

このときの時間変化は $x+a$ からこの区間を出て行く流れと x から入ってくる流れとの差し引きになる。よって

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+a} n(y,t)\,dy = -J(x+a,t) + J(x,t) \qquad (17)$$

となる。この式を a で割って a を 0 に近づけると(15)を得る。

死亡などで個体変動が起こらず，すべての個体が一定速度 v で変化する場合を考えると

$$J(x,t)=vn(x,t) \qquad (18)$$

となり，x の分布 $n(x,t)$ は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial vn}{\partial x} \qquad (19)$$

となる。さらに，$v=1$ とおくと

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (20)$$

となる。

一方，出産による新生児の加入速度 $n(0, t)$ は，x 歳の女性が女の子を出産する単位時間あたりの速度を $m(x)$ として

$$n(0,t) = \int_0^\infty m(x)n(x,t)\,dt \qquad (21)$$

として表される。

単位時間あたりの x 歳での死亡率を $u(x)$ としてみよう。生まれてから x 歳まで生存できる率 $l(x)$ は