生物学特論A
分類系統学II
第7回

[redacted]

本日のお品書き

1. 先週の落穂ひろい
2. 線形微分方程式系
   - 非線形微分方程式の線形化
   - 行列の指数関数
3. 固有値と固有ベクトル

ロトカ・ヴォルテラモデルの拡張

捕食者と被食者が多様な生態系では，ロトカ・ヴォルテラ方程式の多変数拡張が用いられる。

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) x_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

種間の相互作用 a_{ij} は，i 種が j 種の捕食者であるなら a>0 であり，$a_{ji}<0$ となる。

ロトカ・ヴォルテラモデルの拡張

たとえば，光合成によって有機物を作る植物は生産者と呼ばれ，それを食べる一時消費者（草食動物），さらにそれを食べる2次消費者（肉食動物）というように多様な生態系が形作られる。

前ページの安定性解析を行うことで，現実の生態系の実体に近づくものと思われる。

ロトカ・ヴォルテラモデルの拡張

たとえば，光合成によって有機物を作る植物は生産者と呼ばれ，それを食べる一時消費者（草食動物），さらにそれを食べる2次消費者（肉食動物）というように多様な生態系が形作られる。前ページの安定性解析を行うことで，現実の生態系の実体に近づくものと思われる。

分岐(1)

非線形力学系において，$x(t) = y(t) - y^*$

として $x(t+1) = \mathbf{A}x(t)$ であり，ここで

$\mathbf{A}$ はヤコビアン

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) = \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|_{y=y^*} \right)$$

である。A の固有値の絶対値が 1 より小さいとき，平衡点は安定であるという。

分岐(2)

固有方程式を

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^n + \mathrm{a}_1 \lambda^{n-1} + \cdots \mathrm{a}_n = 0$$

とおけば，2次の場合には以下の条件をみたせば固有値の絶対値は 1 よりも小さくなる。

線形微分方程式系

生理現象，生命現象を扱った微分方程式の多くは非線形である。したがって，解析的な解が存在しないか，あるいは，存在しても求めることが難しいことが多い。この非線形性がモデルの本質ある。しかし，部分的には線形の微分方程式に還元できる場合もある。ここでは，そのような線形微分方程式の性質について見て行くことにする。

非線形微分方程式の線形化

関数 f, g を未知とする非線形微分方程式系,

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

があるとする。この式の平衡点を (x^*,y^*) とする。 すなわち,

$$f(x^*,y^*) = 0$$

$$g(x^*,y^*) = 0$$

を満たすものとする。このとき f(x,y) を平衡点の近傍で線形化することを考える。f(x,y) を平衡点の近傍でテーラー展開し,

$$f(x,y) = f(x^*,y^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x^*,y^*)} (x - x^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x^*,y^*)} (y - x^*) + \cdots$$

$$g(x,y) = g(x^*,y^*) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x^*,y^*)} (x - x^*) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x^*,y^*)} (y - x^*) + \cdots$$

として，高次の項を無視する。以上より，平衡点におけるヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

が定義できるので

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る。この連立微分方程式系を解くことを考える。

定式化

ロトカ・ヴォルテラ方程式の捕食者と被捕食者との関係を， 連立微分方程式（微分方程式系ともいう）としてとらえる。x_1, x_2 という 2 種類の動物を考え，この動物間で共存，競合などの関係が生じると考える。するとこれら 2 種の個体数の時間変動は,

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

と表せる。線形代数の書き方に従えば，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

が定義できるので

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と表すことにすれば，上式は，

と表せる。線形代数の書き方に従えば，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

となる。この考え方は重要である。今，線形とは限らない微分方程式系

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$$

を考えて，f を平衡点，つまりすべての t に対して

$$f(\mathbf{x}) = 0$$

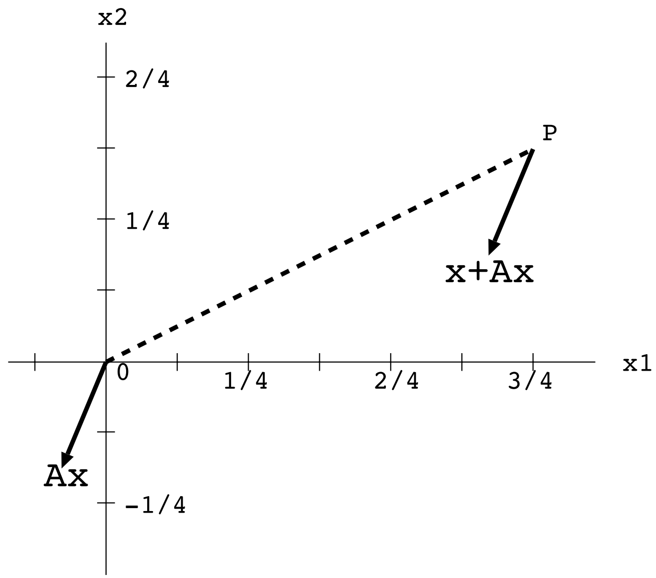
をみたす点 x の近くでテイラー展開し，一次の項までとれば $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ になるからである。

行列表現された連立微分方程式の右辺を見ると，
$\mathbf{A}$ は $\mathbf{R}^2$ を線形変換

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \to \mathbf{A}\mathbf{x}$$

によって，写像することだと考えることができる。
この様子をみるために，実際に $\mathbf{x}$ と $\mathbf{A}\mathbf{x}$ を $\mathbf{R}^2$ 上に描いてみよう。

それには，ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ を原点 O から座標 x_1, x_2 を持つ点 P に向かう矢線と考え，終点 P からベクトル $\mathbf{A}\mathbf{x}$ に対する矢線を引くと分かりやすい。



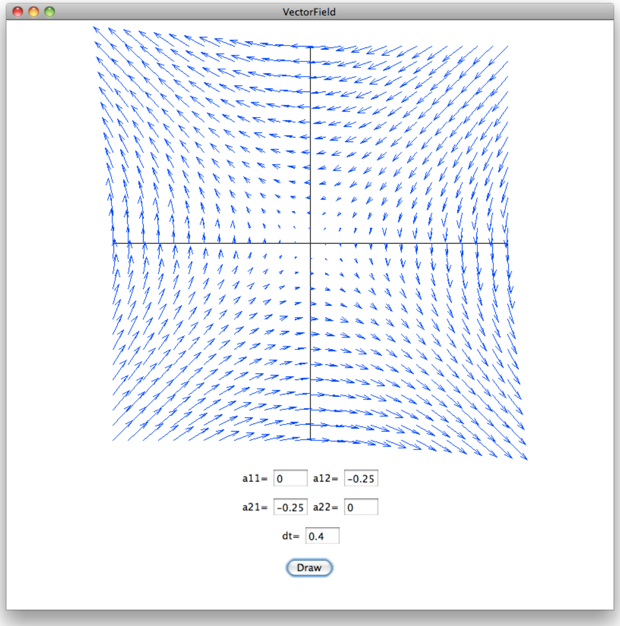
例えば，次の行列で考えてみる。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

点 $P=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{8}\right)^t$ に注目して，$\mathbf{Ax}=\left(-\frac{3}{32},-\frac{3}{16}\right)^t$ に対応

する矢線 OQ を描く。それから OQ の始点が，点 P にくるように OQ を平行移動する。

このようにして，R^2 上の各点に対してベクトルを描き入れるとベクトル場が描ける。



原点 x=0 は常に線形微分方程式 $\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}$

の解となる。したがって，原点 0 も線形微分方程式系の特別な軌跡と考えることができる。このような点は，微分方程式の平衡点，または特異点と呼ばれる。

一般に，軌道が描かれる平面 R^2 は線形微分方程式系の相平面と呼ばれる。相平面は，微分方程式の解曲線で隙間なく埋め尽くされているが，その曲線は交わることはない。

微分方程式 dx/dx = ax の解は，初期値を x_0 とすれば， $x(t) = x_0e^{at}$ と表わせた。今度は微分方程式系 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ の解で $\mathbf{x}_0$ を満たす解を求めることを考えよう。この２つは同じパターンであるから，この解を

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

と置いてみる。指数関数 $f(x) = e^{at}$

はテーラー展開を使って

$$e^{at} = 1 + \frac{a}{1!}t + \frac{a^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

テーラー展開の復習

テーラー展開は

$$f(x) \doteq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

覚えてる？

$$e^{at} = 1 + \frac{a}{1!}t + \frac{a^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

のマネをして

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!}t^n + \cdots$$

と置いてみる。ここで I は単位行列である。右辺の行列は次のような行列である。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の k 乗 $\mathbf{A}^k$ を

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

と書いておく。先ほどの式

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!}t^n + \cdots$$

の右辺第 k 項は 2×2 行列

$$\frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k = \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)}\dfrac{t^k}{k!} & a_{12}^{(k)}\dfrac{t^k}{k!} \\ a_{21}^{(k)}\dfrac{t^k}{k!} & a_{22}^{(k)}\dfrac{t^k}{k!} \end{pmatrix}$$

であるから，この式の(i,j) 要素は t のベキ級数

$$\delta_{ij} + \frac{a_{ij}^{(1)}}{1!}t + \frac{a_{ij}^{(2)}}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a_{ij}^{(n)}}{n!}t^n + \cdots$$

である。ただし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

この級数は任意の実数 t に対して収束することが示される。そこでこの(i,j)要素を行列 $e^{\mathbf{A}t}$ と定義することにする。これを行列 A の指数関数と呼ぶ。これは次のような性質を持つ。

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ならば $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$

$$\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$$

$$e^{\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right)t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P}$$

練習問題

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の解を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = -\mathbf{IA} = -\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = -\mathbf{AA} = -\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^4\mathbf{A} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^6 = \mathbf{A}^5\mathbf{A} = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}}{1!}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3+\frac{\mathbf{A}^4}{4!}t^4+\frac{\mathbf{A}^5}{5!}t^5+\frac{\mathbf{A}^6}{6!}t^6+\cdots \\
&= \mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}}{1!}t-\frac{\mathbf{I}}{2!}t^2-\frac{\mathbf{A}}{3!}t^3+\frac{\mathbf{I}}{4!}t^4+\frac{\mathbf{A}}{5!}t^5-\frac{\mathbf{I}}{6!}t^6+\cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{1!} \\ -\frac{t}{1!} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +\begin{pmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{t^5}{5!} \\ -\frac{t^5}{5!} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{t^6}{6!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^6}{6!} \end{pmatrix}+\cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots & \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots \\ -\frac{t}{1!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\cdots & 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これにより $x(t) = e^{\mathbf{A}t}x_0$ **の解は**

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0\cos t + y_0\sin t \\ -x_0\sin t + y_0\cos t \end{pmatrix}
$$

となる。ちなみに

$$
\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{K}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

とおくと

$$
e^{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin t
$$

となる。すなわち

$$
e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{I}t+\mathbf{K}t} = \mathbf{I}\cos t + \mathbf{K}\sin t
$$

とあらわせる。行列 K は

$$
\mathbf{K}^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\mathbf{I}
$$

オイラーの公式

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta
$$

の行列バージョンということができる。

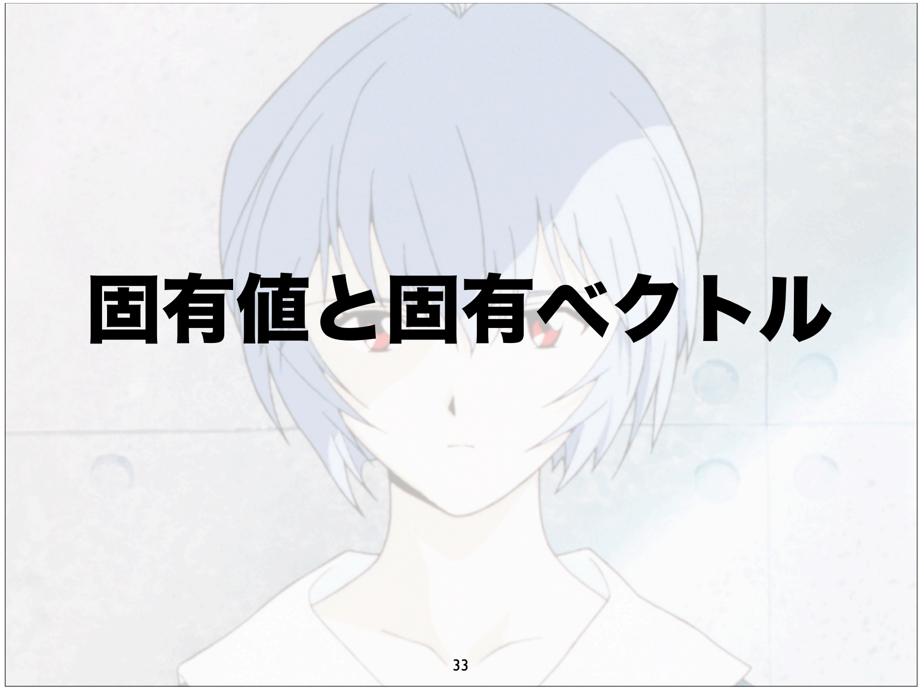
以上をまとめると，線形微分方程式系，

$$
\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}
$$

は，通常の微分方程式と書式的には変わることなく

$$
\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)e^{\mathbf{A}t}
$$

と解くことができる。行列の指数関数は先に出てきたとおりである。



固有値と固有ベクトル

線形微分方程式系 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ を実際に解いてみよう。たとえば，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

は，任意の実数λによって

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

が成り立つ。一般に線形変換 Ax によって

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

みたすベクトル x=0 が $\mathbf{R}^2$ の中に存在するとき

実数 λ を線形変換 A の固有値，そのときの x を固有値 λ に対する A の固有ベクトルと言った。

一般に，行列 M が 2 次の正方行列であれば，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の場合

$$\det|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

が必要十分条件である。この場合，

(a - λ)(d - λ) - bc = 0 すなわち，

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

の根を固有値 λ と言う。

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

を線形変換 A の特性多項式と言った。行列 A の固有値は以下のようにして求めた。

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

故に，(λ - 1)(λ - 3) = 0 ということになる。

$\lambda_1=1$ に対応する固有ベクトルを $(p_{11}, p_{21})^T$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

だから，固有ベクトルは方向さえ表せれば良いので，たとえば $p_1=(1,1)^t$ となる。同様にして，λ2=3 に対応する固有ベクトルは，$p_2=(1,-1)^t$ となる。

固有値は，線形微分方程式系の安定性と関係がある。固有値は，その固有値に対応する固有ベクトルの方向に状態点の動きの速さを示すことになるからである。上の例では，固有値が正なので，軌道は原点から離れていく不安定ノードになる。

実習

教材の入ったフォルダの中には VectorField.class が入っている。これをダブルクリックすれば，ベクトル場を描くシミュレータが起動する。

LinearDiffEqs.class は，線形微分方程式系の解曲線を描くプログラムである